

**Korrespondenzen
und
meromorphe Abbildungen**

Günther Kraus
München

1971

K o r r e s p o n d e n z e n
u n d
m e r o m o r p h e A b b i l d u n g e n

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

G ü n t h e r K r a u s

aus München

München, November 1970



Berichterstatter: Professor Dr. Karl Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1971

Einleitung

Zu den grundlegenden Begriffen der Funktionentheorie gehört der Begriff der meromorphen Funktion. Während in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen eine meromorphe Funktion sich stets als holomorphe Abbildung in die Riemannsche Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ auffassen läßt, können bei mehreren Veränderlichen Unbestimmtheitsstellen auftreten, das sind Punkte, denen durch die meromorphe Funktion eine nicht nur aus einem Punkt bestehende Teilmenge des Bildraumes zugeordnet wird. Im Gegensatz zu den mehrdeutigen holomorphen Funktionen treten als Bildmengen einzelner Punkte auch analytische Mengen von positiver Dimension auf. Durch eine meromorphe Funktion wird also bei mehreren Veränderlichen i.a. keine Abbildung im eigentlichen Sinn definiert, sondern eine Korrespondenz, das ist eine Abbildung in die Potenzmenge des Bildraumes.

R. Remmert hat 1957 den Begriff der meromorphen Funktion zu dem der meromorphen Abbildung zwischen reduzierten komplexen Räumen X, Y verallgemeinert. Bei ihm ist eine meromorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung von X in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(Y)$, derart, daß der Graph $G_f := \{(x, y) \in X \times Y: y \in f(x)\}$ eine eigentliche Modifikation des Urbildraumes X darstellt [10]. Diesen Begriff übernahm K. Stein [15, 16, 17] und stellte ihn auf die allgemeinere Basis der holomorphen Korrespondenzen. Nach Stein heißt eine Korrespondenz f zwischen topologischen Räumen X, Y stetig, wenn die Abbildung $\hat{f}: G_f \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, eigentlich ist; sind X, Y reduzierte komplexe Räume, so heißt f holomorph, wenn f stetig ist und wenn G_f eine analytische Menge in $X \times Y$ ist. Eine meromorphe

Abbildung ist somit eine holomorphe Korrespondenz mit der Zusatzeigenschaft, daß der Graph eine eigentliche Modifikation des Urbildraumes ist.

Will man den Begriff der meromorphen Abbildung auf nicht-reduzierte komplexe Räume übertragen, so liegt es nahe, zunächst den Begriff der holomorphen Korrespondenz zu verallgemeinern. Während man bei reduzierten Räumen bei der Definition der holomorphen Korrespondenz von einer Mengen-Korrespondenz ausgehen konnte, an die man dann gewisse Zusatzforderungen stellte, erweisen sich diese Gesichtspunkte im Fall nicht-reduzierter Räume als zu eng. Zur Definition einer holomorphen Korrespondenz f von X nach Y wird man nun nicht fordern, daß der Graph G_f eine analytische Menge in $X \times Y$ ist, sondern man wird den Graphen als abgeschlossenen, nicht notwendig reduzierten komplexen Unterraum von $X \times Y$ voraussetzen; ferner wird man die Stetigkeit von f verlangen. Eine holomorphe Korrespondenz ist dann nicht mehr alleine durch eine Abbildung in die Potenzmenge des Bildraumes Y bestimmt; vielmehr muß auch die komplexe Struktur des Graphen angegeben werden. Diese Situation ist von den holomorphen Abbildungen bei nicht-reduzierten komplexen Räumen her geläufig.

Wir werden zunächst von einem noch allgemeineren Begriff der Korrespondenz ausgehen, der in beliebigen Kategorien brauchbar ist, in denen Produkte und Faserprodukte existieren. Ist $\underline{C}$ eine solche Kategorie und sind X, Y Objekte von $\underline{C}$, so gehen wir zur Definition einer Korrespondenz f von X nach Y (in Zeichen $f: X \rightarrow Y$) aus von einem beliebigen Objekt T und von Morphismen $u: T \rightarrow X$, $v: T \rightarrow Y$ und führen in der

Klasse aller Tripel (T, u, v) eine Äquivalenzrelation ein:
 Sind (T_v, u_v, v_v) , $v = 1, 2$, zwei solche Tripel und ist
 (F, p_1, p_2) das Faserprodukt von T_1 und T_2 bzgl. der Mor-
 phismen $(u_v, v_v): T_v \rightarrow X \times Y$, so heißen die beiden Tripel
 äquivalent, wenn die Morphismen p_v universelle Epimorphis-
 men sind. Eine Korrespondenz ist nun als eine Äquivalenzklas-
 se von Tripeln (T, u, v) definiert.

Diese Definition stellt tatsächlich eine echte Verallge-
 meinerung des alten Begriffs der Korrespondenz dar. Denn ist
 $\underline{C}$ die Kategorie der Mengen oder der topologischen Räume, so
 kann jede Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ in $\underline{C}$ durch genau ein Tri-
 pel (T, u, v) repräsentiert werden, derart, daß T eine Teil-
 menge von $X \times Y$ ist; ein solches Tripel heißt eingebetteter
 Repräsentant von f . In diesen Kategorien stimmt also der
 neue Begriff der Korrespondenz im wesentlichen mit dem üblichen
 überein. Dagegen braucht eine Korrespondenz in der Kategorie
 der komplexen Räume keinen eingebetteten Repräsentanten zu be-
 sitzen; falls dies doch der Fall ist, spricht man von einer
 eingebetteten Korrespondenz. Die holomorphen Korrespondenzen
 im Sinne von K. Stein erscheinen in dieser Theorie somit als
 spezielle eingebettete Korrespondenzen.

Zur Definition der meromorphen Abbildung benötigt man
 noch den Begriff der eigentlichen Modifikationsabbildung. Eine
 meromorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wird nämlich als eingebettete
 holomorphe Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten
 (T, u, v) definiert, derart, daß u eine eigentliche Modifi-
 kationsabbildung ist. Eine eigentliche Modifikationsabbildung
 ist - wie im reduzierten Fall - eine eigentliche holomorphe
 Abbildung, die "fast überall" biholomorph ist. Die Definition

von "fast überall" wird so getroffen, daß die Strukturgarben von Bild- und Urbildraum einer eigentlichen Modifikationsabbildung sich nur in einem gewissen Umfang unterscheiden können. Zur genauen Definition wird der Begriff der analytisch dünnen Menge und des Komponentensystems eines komplexen Raumes eingeführt.

Nach dieser Darstellung des in der vorliegenden Arbeit eingeführten Begriffs der meromorphen Abbildung geben wir nun einen kurzen Überblick über den Inhalt der einzelnen Paragraphen.

In § 1 werden *K o r r e s p o n d e n z e n* in einer beliebigen Kategorie $\underline{C}$ mit Produkten und Faserprodukten definiert und verschiedene Aussagen gegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß man jeden Morphismus als spezielle Korrespondenz auffassen kann, und es wird die Komposition von Korrespondenzen definiert und das Assoziativgesetz bewiesen. Man erhält somit eine die Kategorie $\underline{C}$ umfassende Kategorie $\underline{CK}$ mit den Objekten von $\underline{C}$ als Objekten und den Korrespondenzen in $\underline{C}$ als Morphismen. Definiert werden ferner Umkehrkorrespondenz, Verbindung und Produkt von Korrespondenzen.

In § 2 werden Korrespondenzen zwischen Mengen und topologischen Räumen betrachtet.

§ 3 bringt die Definition der *h o l o m o r p h e n K o r r e s p o n d e n z e n*. Als Hilfssätze werden Aussagen über universelle Epimorphismen in der Kategorie der komplexen Räume und über Bilder bei holomorphen Abbildungen bewiesen. Als ein in dieser Arbeit wichtiger technischer Begriff werden sog. *S u r j e k t i o n e n* eingeführt, das sind holomorphe

Abbildungen $f = (|f|, *f)$ zwischen komplexen Räumen mit folgenden Eigenschaften: (i) Die stetige Abbildung $|f|$ der zugrundeliegenden topologischen Räume ist surjektiv, (ii) der Garbenhomomorphismus $*f$ ist halmweise injektiv. Surjektionen sind vor allem aus folgenden Gründen wichtig: (1) Eine holomorphe Abbildung, die zugleich Surjektion und Immersion (Einbettungsabbildung) ist, ist stets biholomorph. (2) Ein universeller Epimorphismus ist eine Surjektion, eine Surjektion ist ein Epimorphismus. (3) Ist $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so ist $f|X \rightarrow f(X)$ eine Surjektion. Es wird gezeigt, daß die Eigenschaft, Surjektion zu sein, nicht universell (invariant bei Faserprodukten) ist (Beispiel 3.3).

In § 4 wird zunächst der Begriff der *a n a l y t i s c h* *d ü n n e n* Menge eingeführt. Eine abgeschlossene Teilmenge A eines komplexen Raumes X heißt analytisch dünn, wenn für jede offene Menge U in X der Beschränkungshomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U - A)$ injektiv ist. Der hierzu analoge Begriff in der algebraischen Geometrie wurde von A. Grothendieck eingeführt (Éléments de géométrie algébrique IV, 4^{ème} partie, publ. math I.H.E.S. 32, 1967). Ein nützliches Kriterium dafür, ob eine analytische Menge analytisch dünn ist, erhält man nach Einführung des sog. *K o m p o n e n t e n s y s t e m s* des komplexen Raumes. Es handelt sich um eine lokal-endliche Familie irreduzibler analytischer Mengen, die - grob gesprochen - in keinem Punkt analytisch dünn sind. Man kann das Komponentensystem von X auch auffassen als die zur Nullidealgarbe $(0) \subset \mathcal{O}_X$ gehörige Menge von "associated subvarieties" im Sinne von [13] (vgl. auch [4, 18]). Es zeigt sich (Lemma 4.2), daß eine analytische Menge genau dann analytisch dünn ist, wenn

sie keine der analytischen Mengen des Komponentensystems umfaßt.

Wir betrachten anschließend sog. *p r i m ä r e* komplexe Räume. Ein komplexer Raum X heißt primär, wenn seine Reduktion irreduzibel ist und wenn nirgends-dichte analytische Mengen in offenen Unterräumen von X stets analytisch dünn sind. Für primäre komplexe Unterräume eines festen komplexen Raumes gilt ein Identitätssatz, der dem Identitätssatz für irreduzible analytische Mengen entspricht. Wir beweisen auch einen allgemeineren, für beliebige abgeschlossene Unterräume gültigen Identitätssatz, in dessen Formulierung und Beweis der Begriff des Komponentensystems wesentlich auftritt.

Wir führen dann die sog. *P r i m ä r z e r l e g u n g e n* komplexer Räume ein: Ein beliebiger komplexer Raum X läßt sich als Vereinigung von primären Unterräumen darstellen. Dieses Ergebnis beruht auf einem Satz von Y.-T. Siu [13, Th. 6] über Primärzerlegungen von kohärenten analytischen Garben. Die den primären Unterräumen zugrundeliegenden analytischen Mengen bilden gerade das Komponentensystem von X .

Zum Schluß des Paragraphen wird der Begriff "primär" verglichen mit "irreduzibel", wobei der Begriff des irreduziblen komplexen Raumes in genauer Analogie zum reduzierten Fall eingeführt wird. Es zeigt sich, daß jeder irreduzible Raum primär ist, daß aber die Umkehrung i.a. nicht richtig ist.

In § 5 wird die spezielle Klasse der *e i n g e b e t - t e t e n K o r r e s p o n d e n z e n* zwischen komplexen Räumen näher untersucht. Für eingebettete Korrespondenzen lassen sich manche Begriffe in Analogie zum reduzierten Fall erklären; insbesondere gilt auch ein Identitätssatz. Verbin-

ung und Produkt eingebetteter Korrespondenzen sind wieder eingebettet. Dagegen braucht die Komposition eingebetteter Korrespondenzen nicht wieder eingebettet zu sein. Sind f, g holomorphe Korrespondenzen, so kann man aber eine sog. eingebettete Komposition $g \circ f$ definieren. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß für die eingebettete Komposition i.a. nicht das Assoziativgesetz gilt.

Schließlich wird bewiesen, daß die Menge der Punkte, in denen eine eingebettete holomorphe Korrespondenz keine holomorphe Abbildung definiert (dies wird natürlich genau präzisiert), eine analytische Menge ist.

In § 6 werden eigentliche Modifikationsabbildungen definiert. In Satz 6.1 wird gezeigt, daß eine eigentliche Modifikationsabbildung überall bis auf analytisch dünne analytische Ausnahmemengen biholomorph ist; es folgt, daß jede eigentliche Modifikationsabbildung eine Surjektion ist. Anschließend wird gezeigt, daß eigentliche Modifikationsabbildungen die Primärzerlegungen respektieren (Satz 6.3). Sodann untersuchen wir das Verhalten von eigentlichen Modifikationsabbildungen bei Faserprodukten und bei Komposition.

Die eingangs beschriebene Definition der meromorphen Abbildung findet sich in § 7. Nach einer Charakterisierung dieses Begriffs wird der wichtige Identitätssatz für meromorphe Abbildungen bewiesen. Insbesondere sind zwei meromorphe Abbildungen bereits gleich, wenn sie außerhalb einer analytisch dünnen analytischen Menge übereinstimmen. Analog wie im reduzierten Fall definiert man die meromorphe Verbindung und die meromorphe Komposition; ferner

werden bimeromorphe Abbildungen betrachtet.

§ 8 enthält Fortsetzungssätze vom Typ des II. Riemannschen Hebbarkeitssatzes für eingebettete Korrespondenzen, insbesondere für meromorphe Abbildungen. Es wird hierzu ein grundlegender Satz von Frisch-Guenot [3] über die Fortsetzung von kohärenten analytischen Modulgarben benutzt, um eine Verallgemeinerung des bekannten Fortsetzungssatzes von Remmert-Stein für analytische Mengen auf den Fall abgeschlossener komplexer Unterräume herzuleiten; die Herleitung benutzt Ergebnisse von G. Scheja [11]. Wie im Remmert-Steinschen Satz sind Dimensionsvoraussetzungen nötig, diese müssen jedoch im nicht-reduzierten Fall "um 1 stärker" sein. Der Fortsetzungssatz wird zunächst nur für sog. isolierte komplexe Unterräume erhalten; mit Hilfe der Primärzerlegung kann man ihn für beliebige komplexe Unterräume verallgemeinern, wobei die oben erwähnten Dimensionsvoraussetzungen für die einzelnen Primärkomponenten des fortzusetzenden Unterrumes erfüllt sein müssen.

Es ergibt sich nun unmittelbar (unter gewissen Dimensionsvoraussetzungen) ein Fortsetzungssatz für eingebettete holomorphe Korrespondenzen; es wird gezeigt, daß unter allen Fortsetzungen eine eindeutig bestimmte kleinste existiert. Diese kleinste Fortsetzung einer meromorphen Abbildung ist wieder eine meromorphe Abbildung.

Herrn Prof. Dr. Karl Stein, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Mein besonderer Dank gilt auch allen, die mir durch Anregungen und Ratschläge geholfen haben, besonders den Herren Prof. Dr. Otto Forster, Prof. Dr. Hans Kerner, Dozent Dr. Klaus Wolffhardt

und Dr. Hans-Werner Schuster. Schließlich möchte ich meinem Vater danken, der mir durch finanzielle Unterstützung diese Arbeit ermöglicht hat.

Inhalt

§ 1. Korrespondenzen	1
§ 2. Korrespondenzen in <u>Me</u> und <u>Top</u>	26
§ 3. Holomorphe Korrespondenzen	31
§ 4. Primärzerlegung komplexer Räume	45
§ 5. Eingebettete Korrespondenzen	56
§ 6. Eigentliche Modifikationsabbildungen	75
§ 7. Meromorphe Abbildungen	83
§ 8. Fortsetzung von eingebetteten Korrespondenzen	96
Literatur	106

§ 1. Korrespondenzen

Für die Begriffe aus der Theorie der Kategorien sei auf das Lehrbuch von B. Pareigis [9] verwiesen. Wir wollen allerdings die Definition der Kategorie in einer gegenüber [9] etwas allgemeineren Fassung verwenden: Für je zwei Objekte X, Y einer Kategorie $\underline{C}$ sei $\text{Mor}_{\underline{C}}(X, Y)$, die Gesamtheit aller Morphismen $f: X \rightarrow Y$, nicht als Menge vorausgesetzt, sondern nur als Klasse.

Es sei $\underline{C}$ eine Kategorie, I eine Indexmenge, und es seien X_i ($i \in I$) Objekte von $\underline{C}$.

Definition. Ein Paar $(X, (p_i)_{i \in I})$, bestehend aus einem Objekt X von $\underline{C}$ und aus einer Familie von Morphismen $p_i: X \rightarrow X_i$ ($i \in I$), heißt **Produkt** der Objekte X_i , wenn gilt: Sind ein Objekt Y von $\underline{C}$ und Morphismen $q_i: Y \rightarrow X_i$ ($i \in I$) gegeben, so existiert genau ein Morphismus $f: Y \rightarrow X$ mit $q_i = p_i f$ für alle $i \in I$. Die Morphismen p_i heißen die **Projektionen** von X auf X_i .

Das Produkt ist also als Lösung eines universellen Problems definiert; daher ist es, falls es existiert, bis auf eindeutig gegebene Isomorphismen eindeutig bestimmt. $\underline{C}$ heißt **Kategorie mit Produkten**, wenn das Produkt von jeweils endlich vielen Objekten $X_1, \dots, X_k$ von $\underline{C}$ existiert.

Das "Faserprodukt" kann eingeführt werden als ein Produkt in einer Kategorie $\underline{C}/S$, die wie folgt definiert ist: S sei ein fest gewähltes Objekt von $\underline{C}$. Die Objekte von $\underline{C}/S$ sind Paare (X, f) , wobei X ein Objekt von $\underline{C}$ und $f: X \rightarrow S$ ein Morphismus ist. Die Morphismen von einem Objekt (X, f) in ein Objekt (Y, g) sind die Morphismen $h: X \rightarrow Y$ mit $f = g h$. Ausführlich geschrieben bedeutet dies folgendes:

Definition. Seien X_i ($i \in I$) und S Objekte von $\underline{C}$ und $f_i: X_i \rightarrow S$ Morphismen in $\underline{C}$ ($i \in I$). Ein Paar $(X, (p_i)_{i \in I})$, bestehend aus einem Objekt X von $\underline{C}$ und aus einer Familie von Morphismen $p_i: X \rightarrow X_i$ ($i \in I$), heißt **F a s e r - p r o d u k t** der Objekte X_i bzgl. der Morphismen $f_i: X_i \rightarrow S$ (kurz: Faserprodukt der $f_i: X_i \rightarrow S$), wenn gilt:

1. Für alle $i, j \in I$ kommutieren die Diagramme

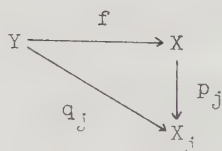
$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p_i} & X_i \\
 p_j \downarrow & & \downarrow f_i \\
 X_j & \xrightarrow{f_j} & S
 \end{array}$$

2. Sind ein Objekt Y von $\underline{C}$ und Morphismen $q_i: Y \rightarrow X_i$ ($i \in I$) gegeben, so daß für alle $i, j \in I$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{q_i} & X_i \\
 q_j \downarrow & & \downarrow f_i \\
 X_j & \xrightarrow{f_j} & S
 \end{array}$$

kommutieren, so existiert genau ein Morphismus $f: Y \rightarrow X$, so

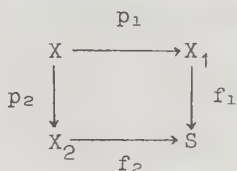
daß für alle $j \in I$ die Diagramme



kommutieren.

$\underline{C}$ heißt Kategorie mit Faserprodukten, wenn das Faserprodukt von jeweils endlich vielen Objekten $X_1, \dots, X_k$ von $\underline{C}$ (bzgl. Morphismen $f_i: X_i \rightarrow S$) existiert. Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, erwähnt man die Morphismen nicht und schreibt $X_1 \times_S \dots \times_S X_k$ für das Faserprodukt und $X_1 \times \dots \times X_k$ für das Produkt.

Die folgende Bezeichnung ist oft praktisch: Ein Diagramm



heißt kartesisches Quadrat, wenn (X, p_1, p_2) Faserprodukt von $f_1: X_1 \rightarrow S$ und $f_2: X_2 \rightarrow S$ ist.

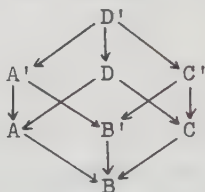
(1.1) In dem kommutativen Diagramm



sei $BEDF$ kartesisch. Dann ist $ABCD$ genau dann kartesisch, wenn $AECF$ kartesisch ist.

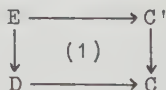
Der einfache Beweis findet sich etwa in [9], S.69, Lemma 3.

(1.2) In dem kommutativen Würfel

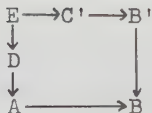


seien die Quadrate $ABCD$, $A'B'C'D'$ und $ABB'A'$ kartesisch. Dann ist auch $DCC'D'$ kartesisch.

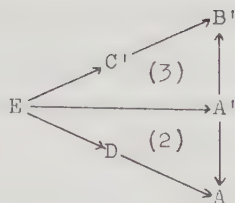
Beweis. Es seien $E \rightarrow D$ und $E \rightarrow C'$ Morphismen, so daß



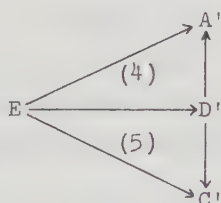
kommutiert. Dann ist



kommutativ, so daß ein eindeutig bestimmter Morphismus $E \rightarrow A'$ existiert, welcher das Diagramm



kommutativ macht. Da also (3) kommutiert, existiert genau ein Morphismus $E \rightarrow D'$, derart, daß



kommutiert. Wir müssen nun zeigen:

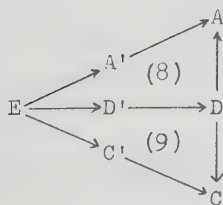
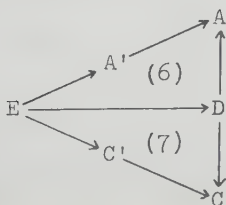
(a) $E \rightarrow D'$ kommutiert;

(b) $E \rightarrow D'$ ist der einzige Morphismus mit der Eigenschaft, daß



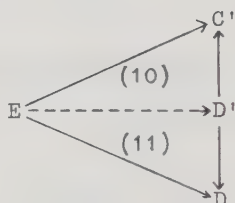
kommutiert.

Zu (a) genügt es, da $ABCD$ kartesisch ist, zu zeigen, daß die Diagramme

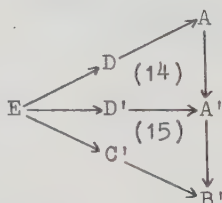
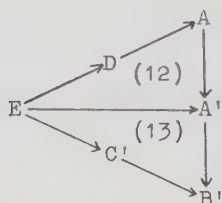


kommutieren. (6) ist (2); (7) ist (1); (8) und (9) folgen aus (4) bzw. (5).

Zum Beweis von (b) nehmen wir an, daß es einen weiteren Morphismus $E \dashrightarrow D'$ gibt, so daß



kommutiert. Da $A'B'C'D'$ kartesisch ist, genügt es zu zeigen, daß $E \dashrightarrow D'$ kommutiert (hieraus folgt, daß $E \dashrightarrow D'$ und $E \longrightarrow D'$ übereinstimmen). Weil $ABB'A'$ kartesisch ist, genügt es hierzu, die Kommutativität der Diagramme



zu zeigen. (12) ist (2); (13) ist (3); (14) und (15) folgen aus (10) bzw. (11).

Es sei

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & S \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat. Man beweist leicht: Ist f_1 ein Mono-

morphismus, so ist auch p_2 ein Monomorphismus. Die entsprechende Aussage für Epimorphismen gilt nicht; man führt daher den folgenden Begriff ein:

Definition. Ein Morphismus $f_1: X_1 \rightarrow S$ heißt **u n i v e r - s e l l e r E p i m o r p h i s m u s** in $\underline{C}$, wenn gilt: Ist $(*)$ ein kartesisches Quadrat, so ist p_2 ein Epimorphismus.

Ein universeller Epimorphismus ist insbesondere ein Epimorphismus. Man zeigt leicht mittels 1.1: Ist f_1 ein universeller Epimorphismus und ist $(*)$ ein kartesisches Quadrat, so ist auch p_2 ein universeller Epimorphismus. Auch die folgende Aussage ist leicht zu beweisen:

(1.3) Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Morphismen in $\underline{C}$.

- Sind f und g Monomorphismen (bzw. Epimorphismen bzw. universelle Epimorphismen), dann auch $g f$.
- Ist $g f$ Monomorphismus, dann auch f .
- Ist $g f$ (universeller) Epimorphismus, dann auch g .
- Ein Isomorphismus ist Monomorphismus und universeller Epimorphismus.

Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $\underline{C}$.

f heißt **S c h n i t t** (in $\underline{C}$), wenn es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $g f = \text{id}_X$.

f heißt **R e t r a k t i o n** (in $\underline{C}$), wenn es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $f g = \text{id}_Y$.

(1.4) a) Ein Schnitt ist ein Monomorphismus.

b) Eine Retraktion ist ein universeller Epimorphismus.

c) Ist

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & X \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat, so sind p, q Retraktionen. Genau dann gilt $p = q$, wenn f ein Monomorphismus ist.

d) Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Genau dann ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

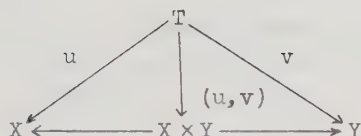
ein kartesisches Quadrat, wenn f ein Monomorphismus ist.

Der einfache Beweis ergibt sich aus den Definitionen und aus 1.3.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun an die Definition der Korrespondenzen gehen.

Es sei $\underline{C}$ stets eine Kategorie mit Produkten und Faserprodukten, und es seien X, Y Objekte von $\underline{C}$. Wir führen in der Klasse aller Tripel (T, u, v) , wobei T ein Objekt von $\underline{C}$ und $u: T \rightarrow X$, $v: T \rightarrow Y$ Morphismen sind, eine Äquivalenzrelation " $\sim$ " ein.

Die Morphismen u und v bestimmen einen eindeutig gegebenen Morphismus $(u, v): T \rightarrow X \times Y$, so daß das Diagramm



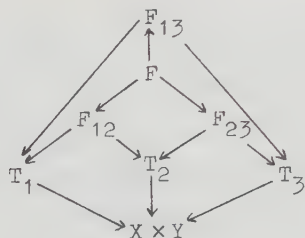
kommutiert, wobei die waagrechten Pfeile die Projektionen sind.

Es sei nun

$$(T_1, u_1, v_1) \sim (T_2, u_2, v_2)$$

genau dann, wenn für das Faserprodukt (F, p_1, p_2) von $(u_1, v_1): T_1 \rightarrow X \times Y$ und $(u_2, v_2): T_2 \rightarrow X \times Y$ gilt: Die Morphismen p_1 , p_2 sind universelle Epimorphismen in $\underline{C}$.

Es ist klar, daß diese Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sie ist auch transitiv, also eine Äquivalenzrelation. Sei nämlich $(T_1, u_1, v_1) \sim (T_2, u_2, v_2)$ und $(T_2, u_2, v_2) \sim (T_3, u_3, v_3)$. Bildet man die Faserprodukte $F_{ij} := T_i \times_{X \times Y} T_j$ ($i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$) und $F := F_{12} \times_{T_2} F_{23}$, so existiert ein Morphismus $F \rightarrow F_{13}$, so daß das Diagramm



kommutiert. Die Morphismen $F_{12} \rightarrow T_1$, $F_{12} \rightarrow T_2$, $F_{23} \rightarrow T_2$ und $F_{23} \rightarrow T_3$ sind universelle Epimorphismen; daraus folgt, daß $F \rightarrow F_{12}$ und $F \rightarrow F_{23}$ und nach 1.3 auch $F_{13} \rightarrow T_1$ und $F_{13} \rightarrow T_3$ universelle Epimorphismen sind, d.h. $(T_1, u_1, v_1) \sim (T_3, u_3, v_3)$.

Definition. Eine Äquivalenzklasse $f = [(T, u, v)]$ bzgl. der Äquivalenzrelation " $\sim$ " heißt **K o r r e s p o n d e n z** (in $\underline{C}$) von X nach Y .

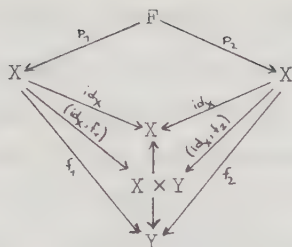
Wir verwenden für Korrespondenzen die Bezeichnung $f: X \longrightarrow Y$. Sei $\mathcal{C}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen $[(T, u, v)]$. Identifiziert man eine Korrespondenz $f: X \longrightarrow Y$ mit ihrem eindeutig bestimmten Repräsentanten $(T, u, v) \in \mathcal{C}$, so kann man die Klasse $\text{Kor}_{\underline{C}}(X, Y)$ aller Korrespondenzen von X nach Y betrachten; diese Klasse kann als Oberklasse von $\text{Mor}_{\underline{C}}(X, Y)$, der Klasse aller Morphismen von X in Y , aufgefaßt werden, denn es gilt:

(1.5) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\underline{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Kor}_{\underline{C}}(X, Y) \\ f &\mapsto [(X, \text{id}_X, f)] \end{aligned}$$

ist injektiv.

Beweis. Es seien $f_i: X \rightarrow Y$, $i = 1, 2$, Morphismen in $\underline{C}$ mit $(X, \text{id}_X, f_1) \sim (X, \text{id}_X, f_2)$. Sei (F, p_1, p_2) das Faserprodukt von $(\text{id}_X, f_1): X \rightarrow X \times X$ und $(\text{id}_X, f_2): X \rightarrow X \times Y$, und seien $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen. Dann kommutiert das Diagramm



Insbesondere gilt $p_1 = p_2$ und daher $f_1 p_1 = f_2 p_2 = f_2 p_1$.
Da p_1 wegen $(X, id_X, f_1) \sim (X, id_X, f_2)$ ein Epimorphismus ist,
folgt $f_1 = f_2$.

Man kann also einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ mit der Korrespondenz $[(X, id_X, f)]: X \multimap Y$ identifizieren. Wir sagen: "Eine Korrespondenz ist ein Morphismus", wenn die Korrespondenz einen Repräsentanten der Form (X, id_X, f) besitzt.

Die folgende Aussage gibt einen Überblick über die Repräsentanten einer Korrespondenz.

(1.6) Sei $f = [(T, u, v)]: X \multimap Y$ eine Korrespondenz in $\underline{C}$.

a) Ist $t: T' \rightarrow T$ ein universeller Epimorphismus, so gilt $f = [(T', u t, v t)]$.

b) Ist (u, v) ein Monomorphismus und $t: T' \rightarrow T$ ein Morphismus, so gilt $f = [(T', u t, v t)]$ genau dann, wenn t universeller Epimorphismus ist.

c) Gilt auch $f = [(T', u', v')]$ und ist (F, p, p') das Faserprodukt von $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ und $(u', v'): T' \rightarrow X \times Y$, so gilt $f = [(F, u p, v' p')]$.

Beweis. Sei $t: T' \rightarrow T$ ein Morphismus und sei (F, p, p') das Faserprodukt von $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ und $(u t, v t): T' \rightarrow X \times Y$. Wegen $(u, v) t = (u t, v t)$ und wegen der universellen

Eigenschaft des Faserprodukts existiert ein Morphismus $\xi: T' \rightarrow F$ mit $p' \xi = \text{id}_{T'}$ und $p \xi = t$. Nach 1.3, c) ist daher p' ein universeller Epimorphismus und, falls t es ist, auch p ; damit ist a) bewiesen. Ist (u, v) ein Monomorphismus, so gilt auch $t p' = p$; also ist in diesem Fall p genau dann ein universeller Epimorphismus, wenn t es ist. Somit ist auch b) gezeigt. c) folgt wegen $v p = v' p'$ aus a).

Definition. Es seien X, Y, Z Objekte von $\underline{C}$ und $f: X \rightarrow Y$, $f': Y \rightarrow Z$ Korrespondenzen in $\underline{C}$. Ferner seien (T, u, v) und (T', u', v') Repräsentanten von f bzw. f' und (T'', p, p') das Faserprodukt von $v: T \rightarrow Y$ und $u': T' \rightarrow Y$. Die Korrespondenz

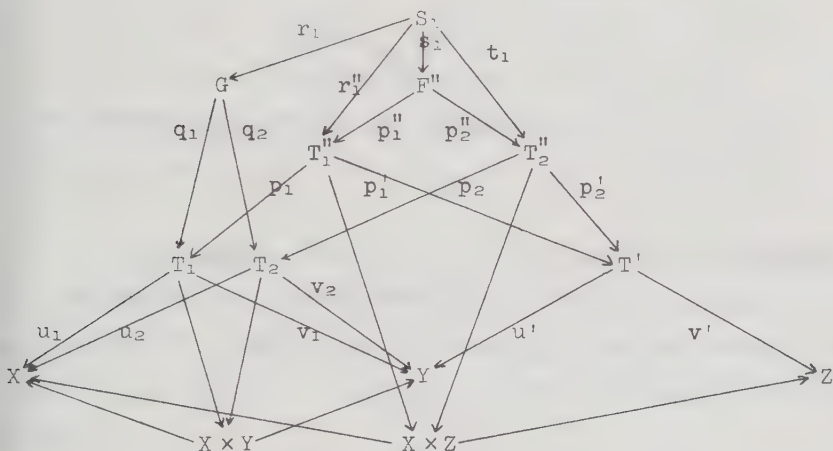
$$f'f := [(T'', u, p, v' p')]: X \rightarrow Z$$

heißt **K o m p o s i t i o n** von f und f' .

Es ist zu zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. Aus Symmetriegründen genügt es, den Fall zu betrachten, daß zwei Repräsentanten (T_i, u_i, v_i) , $i = 1, 2$, von f gegeben sind; f' sei repräsentiert durch (T', u', v') . Sei (T''_1, p''_1, p'_1) das Faserprodukt von $v_1: T_1 \rightarrow Y$ und $u': T' \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$). Sei (T''_2, p''_2, p'_2) das Faserprodukt von $(u_1 p_1, v' p'_1): T''_1 \rightarrow X \times Z$ und $(u_2 p_2, v' p'_2): T''_2 \rightarrow X \times Z$; es ist zu zeigen, daß die p''_i , $i = 1, 2$, universelle Epimorphismen sind.

Sei (G, q_1, q_2) das Faserprodukt von $(u_1, v_1): T_1 \rightarrow X \times Y$ und $(u_2, v_2): T_2 \rightarrow X \times Y$. Wegen $(T_1, u_1, v_1) \sim (T_2, u_2, v_2)$ sind

q_1 und q_2 universelle Epimorphismen in $\underline{C}$. Wir bilden die Faserprodukte (S_i, r_i, r_i'') von $q_i: G \rightarrow T_1$ und $p_i: T_1'' \rightarrow T_1$ ($i = 1, 2$; Zeichnung: $i = 1$):



Mit q_1 ist auch r_1'' ein universeller Epimorphismus ($i = 1, 2$). Wir erhalten daher die Behauptung, indem wir Morphismen $s_i: S_i \rightarrow F''$ angeben mit $r_i'' = p_i'' s_i$, $i = 1, 2$ (wegen 1.3). Man findet die Morphismen s_i auf die folgende Weise: Man hat Morphismen

$$q_j r_i: S_i \rightarrow T_j$$

$$p_i' r_i'': S_i \rightarrow T_i'$$

für $i = 1, 2$, $i \neq j$, und man verifiziert leicht:

$$v_j q_j r_i = u' p_i' r_i''.$$

Daher existieren (eindeutig bestimmte) Morphismen $t_i: S_i \rightarrow T_j''$ ($i, j = 1, 2$, $i \neq j$) mit

$$p_j t_i = q_j r_i$$

$$p'_j t_i = p'_i r''_i$$

($i = 1, 2$, $i \neq j$), und es gilt:

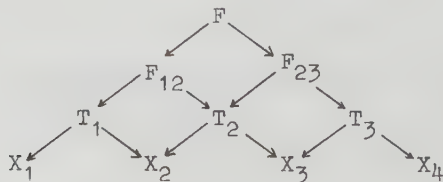
$$(u_i p_i, v' p'_i) r''_i = (u_j p_j, v' p'_j) t_i$$

($i = 1, 2$, $i \neq j$), so daß Morphismen $s_i: S_i \rightarrow F''$ existieren mit $p''_i s_i = r''_i$ und $p'_j s_i = t_i$ für $i = 1, 2$, $i \neq j$.

Bemerkung. Sind $f: X \rightarrow Y$ und $f': Y \rightarrow Z$ Morphismen in $\underline{C}$ und faßt man f und f' als Korrespondenzen in $\underline{C}$ auf, so stimmt die hier definierte Komposition von f und f' mit der gewöhnlichen Komposition überein.

(1.7) Für die Komposition von Korrespondenzen gilt das Assoziativgesetz.

Beweis. Seien $f_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ Korrespondenzen in $\underline{C}$ ($i = 1, 2, 3$), und seien (T_i, u_i, v_i) Repräsentanten der f_i . Durch Bildung von Faserprodukten erhält man ein aus kartesischen Quadraten bestehendes kommutatives Diagramm



Nach 1.1 sind auch $T_1 X_2 F_{23} F$ und $F_{12} X_3 T_3 F$ kartesisch, also ist $(F, F \rightarrow X_1, F \rightarrow X_4)$ Repräsentant sowohl von $(f_3 f_2) f_1$ als auch von $f_3 (f_2 f_1)$.

Die Aussagen 1.5 und 1.7 machen es möglich, die Korrespondenzen in einer Kategorie $\underline{C}$ als Morphismen einer grösseren Kategorie $\underline{CK}$ aufzufassen. Diese Kategorie ist wie folgt definiert: $\text{Ob } \underline{CK} := \text{Ob } \underline{C}$; für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \underline{CK}$ sei $\text{Mor}_{\underline{CK}}(X, Y) := \text{Kor}_{\underline{C}}(X, Y)$. Es sei betont, daß $\text{Mor}_{\underline{CK}}(X, Y)$ i. a. keine Menge, sondern eine Klasse ist. Ist $\underline{C}$ eine kleine Kategorie (d.h. $\text{Ob } \underline{C}$ ist eine Menge), so ist $\text{Mor}_{\underline{CK}}(X, Y)$ stets eine Menge.

Definition. Eine Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ heißt **monomorph** bzw. (**universell-**) **epimorph**, wenn es einen Repräsentanten (T, u, v) von f gibt, derart, daß v ein Monomorphismus bzw. ein (universeller) Epimorphismus ist.

In teilweiser Analogie zu 1.3 gilt:

(1.8) Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Korrespondenzen in $\underline{C}$.

a) Sind f und g monomorph (bzw. universell-epimorph), dann auch $g \circ f$.

b) Ist g ein Morphismus und ist $g \circ f$ monomorph, dann ist f monomorph.

c) Ist $g \circ f$ (universell-) epimorph, dann auch g .

d) Ist ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ Monomorphismus in $\underline{C}$, so ist f als Korrespondenz monomorph.

e) Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann ein (universeller) Epimorphismus, wenn f als Korrespondenz (universell-) epimorph ist.

f) Ist die Korrespondenz $f: X \longrightarrow Y$ (universell-) epimorph und ist (T, u, v) ein beliebiger Repräsentant von f , so ist v ein (universeller) Epimorphismus.

Der Beweis von 1.8 ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen und aus 1.7.

Definition. Sei $f = [(T, u, v)]: X \longrightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{C}$. Die Korrespondenz $f^{-1} := [(T, v, u)]: Y \longrightarrow X$ heißt Umkehrkorrespondenz von f .

Es ist klar, daß diese Definition unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten (T, u, v) ist. Es gelten die Regeln $(f_2 f_1)^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1}$ und $(f^{-1})^{-1} = f$.

(1.9) Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{C}$. Ist f universell-epimorph und f^{-1} monomorph, so gilt $f f^{-1} = \text{id}_Y$.

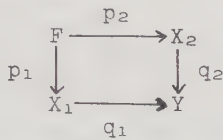
Beweis. Es gibt einen Repräsentanten (T, u, v) von f , derart, daß u ein Monomorphismus und v ein universeller Epimorphismus ist. Nach 1.4,d) ist $(T, \text{id}_T, \text{id}_T)$ das Faserprodukt von $u: T \rightarrow X$ und $u: T \rightarrow X$; also gilt $f f^{-1} = [(T, v, v)]$. Nach 1.6,a) gilt $(T, v, v) \sim (Y, \text{id}_Y, \text{id}_Y)$.

(1.10) Corollar. Sei $f: X \longrightarrow Y$ universell-epimorph und f^{-1} monomorph. Dann gilt:

a) f ist eine Retraktion in $\underline{CK}$. Insbesondere (vgl. 1.4) ist f ein Epimorphismus in $\underline{CK}$, d.h., sind $g_v: Y \longrightarrow Z$, $v = 1, 2$, Korrespondenzen in $\underline{C}$ mit $g_1 f = g_2 f$, so folgt $g_1 = g_2$.

b) f^{-1} ist ein Schnitt in CK. Insbesondere (vgl. 1.4) ist f^{-1} ein Monomorphismus in CK, d.h., sind $g_v: Z \rightarrow X_v$, $v = 1, 2$, Korrespondenzen in C mit $f^{-1} g_1 = f^{-1} g_2$, so folgt $g_1 = g_2$.

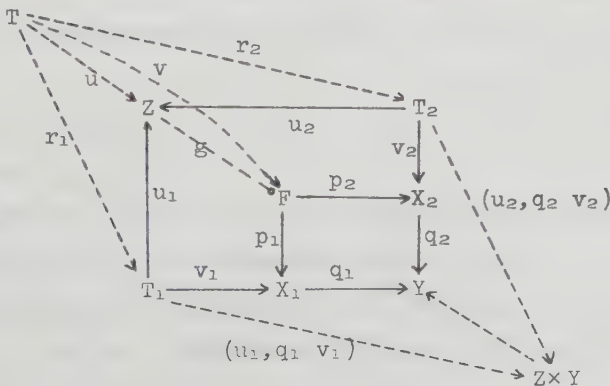
(1.11) Hilfssatz. Das Diagramm



ein kartesisches Quadrat. Es gebe Korrespondenzen $f_v: Z \rightarrow X_v$, $v = 1, 2$, mit $q_1 f_1 = q_2 f_2$. Dann existiert eine (nicht notwendig eindeutig bestimmte) Korrespondenz $g: Z \rightarrow F$ mit $p_v = p_v g$, $v = 1, 2$.

Ein Faserprodukt in C ist also Lösung eines sog. "verallgemeinerten Problems" in CK.

Beweis. Sei $f_v = [(T_v, u_v, v_v)]$, $v = 1, 2$. Man hat dann das folgende kommutative Diagramm (nur die ausgezogenen Pfeile):



Sei (T, r_1, r_2) das Faserprodukt von $(u_1, q_1, v_1): T_1 \rightarrow Z \times Y$ und $(u_2, q_2, v_2): T_2 \rightarrow Z \times Y$. Wegen $q_1 f_1 = q_2 f_2$ gilt $(T_1, u_1, q_1, v_1) \sim (T_2, u_2, q_2, v_2)$; also sind die r_v universelle Epimorphismen. Wegen $q_1 v_1 r_1 = q_2 v_2 r_2$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $v: T \rightarrow F$ mit $p_v v = v_v r_v$, $v = 1, 2$. Setzt man $u := u_1 r_1 = u_2 r_2$ und $g := [(T, u, v)]$, so gilt nach 1.6, a) für $v = 1, 2$:

$$p_v g = [(T, u, p_v v)] = [(T, u_v r_v, v_v r_v)] = [(T_v, u_v, v_v)] = f_v.$$

Die Aussage 1.11 läßt sich wie folgt ergänzen:

(1.12) Es sei

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p_2} & X_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\ X_1 & \xrightarrow{q_1} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat, und es seien $f_v: Z \rightarrow X_v$ ($v = 1, 2$) Korrespondenzen. Genau dann existiert eine Korrespondenz $g: Z \rightarrow F$ mit $f_v = p_v g$ ($v = 1, 2$), wenn $q_1 f_1 = q_2 f_2$ gilt.

Beweis. Aus $q_1 f_1 = q_2 f_2$ folgt die Existenz von g nach 1.11. Sei nun vorausgesetzt, daß es eine Korrespondenz $g: Z \rightarrow F$ gibt mit $f_v = p_v g$, $v = 1, 2$. Dann folgt: $q_1 f_1 = q_1 p_1 g = q_2 p_2 g = q_2 f_2$.

Ein Objekt $E \in \text{Ob } \underline{C}$ heißt Endobjekt, wenn für jedes $X \in \text{Ob } \underline{C}$ gilt: $\text{Mor}_{\underline{C}}(X, E)$ besteht aus genau einem Element. Besitzt die Kategorie $\underline{C}$ ein Endobjekt E , so ist für beliebige Objekte X_1, X_2 von $\underline{C}$ das Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times X_2 & \xrightarrow{p_2} & X_2 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{q_1} & E
 \end{array}$$

kartesisch; dabei seien $p_v: X_1 \times X_2 \rightarrow X_v$ die Projektionen. Setzt man in 1.12 $Y := E$ und $F := X_1 \times X_2$, so erhält man also:

(1.13) Die Kategorie $\underline{C}$ enthalte ein Endobjekt E . Es seien Korrespondenzen $f_v: Z \rightarrow X_v$ gegeben ($v = 1, 2$). Genau dann existiert eine Korrespondenz $g: Z \rightarrow X_1 \times X_2$ mit $f_v = p_v g$, $v = 1, 2$, wenn $q_1 f_1 = q_2 f_2$ gilt, wobei mit $p_v: X_1 \times X_2 \rightarrow X_v$ die Projektionen und mit $q_v: X_v \rightarrow E$ die eindeutig bestimmten Morphismen bezeichnet werden.

Definition. Es seien Korrespondenzen $f_v = [(T_v, u_v, v_v)]: Z \rightarrow X_v$, $v = 1, 2$, gegeben, und es sei (T, r_1, r_2) das Faserprodukt von $u_1: T_1 \rightarrow Z$ und $u_2: T_2 \rightarrow Z$; ferner sei $u := u_1 r_1 = u_2 r_2$ und $v := (v_1 r_1, v_2 r_2)$. Die Korrespondenz

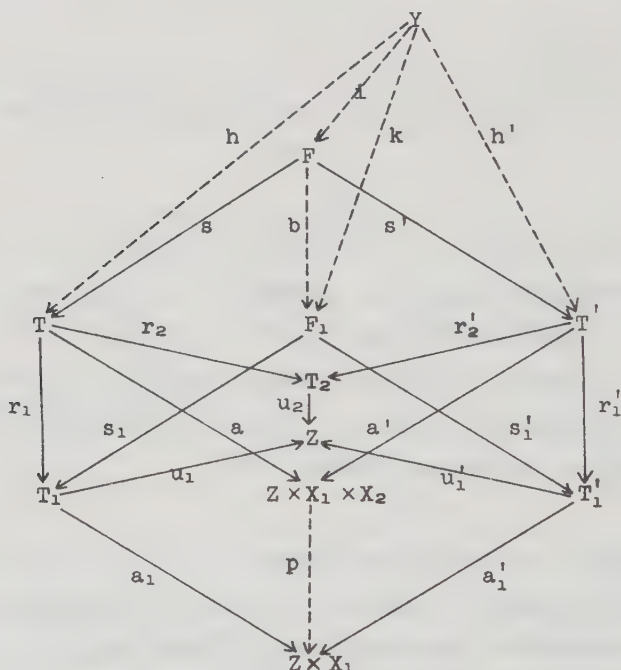
$$(f_1, f_2) := [(T, u, v)]: Z \rightarrow X_1 \times X_2$$

heißt **V e r b i n d u n g** von f_1 und f_2 .

Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl der Repräsentanten:

Sei (T'_1, u'_1, v'_1) ein weiterer Repräsentant von f_1 und sei (T', r'_1, r'_2) das Faserprodukt von $u'_1: T'_1 \rightarrow Z$ und $u'_2: T'_2 \rightarrow Z$; ferner sei $u' := u'_1 r'_1 = u'_2 r'_2$ und $v' := (v'_1 r'_1, v'_2 r'_2)$. Es ist zu zeigen: $(T, u, v) \sim (T', u', v')$. Es sei (F_1, s_1, s'_1) das Faserprodukt von $a_1 := (u_1, v_1): T_1 \rightarrow Z \times X_1$ und $a'_1 := (u'_1, v'_1): T'_1 \rightarrow Z \times X_1$, und es sei (F, s, s') das Faserprodukt

von $a := (u, v): T \rightarrow Z \times X_1 \times X_2$ und $a' := (u', v'): T' \rightarrow Z \times X_1 \times X_2$. Dann hat man das folgende kommutative Diagramm (nur die ausgezogenen Pfeile):



Sei $p: Z \times X_1 \times X_2 \rightarrow Z \times X_1$ die Projektion. Man prüft leicht nach: $pa = a_1r_1$ und $pa' = a'_1r'_1$; daraus folgt $a_1r_1s = a'_1r'_1s'$. Hieraus folgt die Existenz eines Morphismus $b: F \rightarrow F_1$ mit $s_1b = r_1s$ und $s'_1b = r'_1s'$.

Die Morphismen s_1 und s'_1 sind wegen $(T_1, u_1, v_1) \sim (T'_1, u'_1, v'_1)$ universelle Epimorphismen; zum Beweis, daß s und s' universelle Epimorphismen sind, genügt es daher zu zeigen, daß die Quadrate FTT_1F_1 und FTT'_1F_1 kartesisch sind. Wir führen den Beweis für das erste Quadrat; durch analoge Schlüsse ergibt sich der Beweis für das andere Quadrat.

Es seien $h: Y \rightarrow T_1$ und $k: Y \rightarrow F_1$ Morphismen mit $r_1 h = s_1 k$; zu zeigen ist die Existenz genau eines Morphismus $i: Y \rightarrow F$ mit $s i = h$ und $b i = k$. Aus $r_1 h = s_1 k$ folgt $u_2 r_2 h = u_1 s_1 k$; andererseits folgt aus $a_1 s_1 = a'_1 s'_1$, daß $a_1 s_1 = u'_1 s'_1$ gilt; zusammen ergibt sich $u_2 r_2 h = u'_1 s'_1 k$. Da T' als Faserprodukt definiert ist, gibt es somit einen eindeutig bestimmten Morphismus $h': Y \rightarrow T'$ mit $r'_1 h' = s'_1 k$ und $r'_2 h' = r_2 h$.

Wir zeigen nun: $ah = a'h'$. Aus $r'_1 h' = s'_1 k$ folgt $a'_1 r'_1 h' = a'_1 s'_1 k = a_1 s_1 k = a_1 r_1 h$; aus $r'_2 h' = r_2 h$ folgt $v_2 r'_2 h' = v_2 r_2 h$. Also gilt $a'h' = (a'_1 r'_1, v_2 r'_2)h' = (a'_1 r'_1 h', v_2 r'_2 h') = (a_1 r_1 h, v_2 r_2 h) = (a_1 r_1, v_2 r_2)h = ah$.

Es folgt, daß es einen Morphismus $i: Y \rightarrow F$ gibt mit $s i = h$ und $s' i = h'$; es bleibt zu zeigen: $b i = k$. Dies folgt aus den Gleichungen

$$s_1 b i = r_1 h, \quad s'_1 b i = r'_1 h,$$

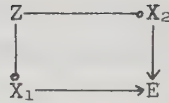
$$s_1 k = r_1 h, \quad s'_1 k = r'_1 h,$$

Da F_1 als Faserprodukt definiert ist. Die Eindeutigkeit von i ist leicht zu zeigen.

(1.14) Die Kategorie $\underline{C}$ besitze ein Endobjekt E . Seien $f_v: Z \rightarrow X_v$, $v = 1, 2$, Korrespondenzen in $\underline{C}$. Genau dann kommutieren für $v = 1, 2$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & X_1 \times X_2 \\ & \searrow f_v & \downarrow \text{Proj.} \\ & & X_v \end{array}$$

wenn das Diagramm



kommutiert.

Der Beweis ergibt sich aus 1.13, aus der Definition von (f_1, f_2) und aus dem Beweis von 1.11.

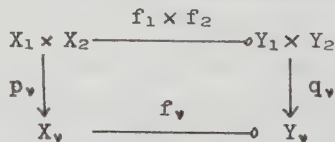
Definition. Es seien Korrespondenzen $f_v: X_v \multimap Y_v$ ($v = 1, 2$) gegeben. Seien $p_v: X_1 \times X_2 \rightarrow X_v$ ($v = 1, 2$) die Projektionen. Die Korrespondenz

$$f_1 \times f_2 := (f_1 p_1, f_2 p_2): X_1 \times X_2 \multimap Y_1 \times Y_2$$

heißt Produkt von f_1 und f_2 .

Aus 1.14 folgt:

(1.15) Die Kategorie $\underline{C}$ besitze ein Endobjekt E . Seien $f_v: X_v \multimap Y_v$ ($v = 1, 2$) Korrespondenzen und $p_v: X_1 \times X_2 \rightarrow X_v$, $q_v: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$) die Projektionen. Genau dann kommutieren für $v = 1, 2$ die Diagramme



wenn das Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{f_2 p_2} & Y_2 \\ f_1 p_1 \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{\quad} & E \end{array}$$

kommutiert.

Zur Untersuchung der Kommutativität des Diagramms $(*)$ betrachtet man die Korrespondenzen $f_v p_v$, ($v = 1, 2$) näher. Es seien (T_v, u_v, v_v) Repräsentanten von f_v . Seien $v, \mu \in \{1, 2\}$, $v \neq \mu$. Dann gilt:

$$(1) \quad f_v p_v = [(T_v \times X_\mu, u_v \times \text{id}_{X_\mu}, v_v t_v)] ;$$

dabei seien $t_v: T_v \times X_\mu \rightarrow T_v$ und $r_\mu: T_v \times X_\mu \rightarrow X_\mu$ die Projektionen.

Zum Beweis ist zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_v \times X_\mu & \xrightarrow{t_v} & T_v \\ u_v \times \text{id}_{X_\mu} \downarrow & & \downarrow u_v \\ X_1 \times X_2 & \xrightarrow{p_v} & X_v \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat ist. Seien $\alpha: Z \rightarrow X_1 \times X_2$ und $\beta: T \rightarrow T_v$ Morphismen mit $p_v \alpha = u_v \beta$. Setzt man $\gamma := (\beta, p_\mu \alpha): Z \rightarrow T_v \times X_\mu$, so gilt $t_v \gamma = \beta$ und $r_\mu \gamma = p_\mu \alpha$. Es ist zu zeigen:

$$(1) \quad (u_v \times \text{id}_{X_\mu}) \gamma = \alpha .$$

(2) Ist $\gamma': Z \rightarrow T_v \times X_\mu$ ein weiterer Morphismus mit $t_v \gamma' = \beta$ und $(u_v \times \text{id}_{X_\mu}) \gamma' = \alpha$, so folgt $\gamma = \gamma'$.

Beweis von (1): Aus $p_\mu (u_v \times \text{id}_{X_\mu}) = r_\mu$ und $r_\mu \gamma = p_\mu \alpha$ folgt $p_\mu (u_v \times \text{id}_{X_\mu}) \gamma = p_\mu \alpha$. Ferner gilt $p_v (u_v \times \text{id}_{X_\mu}) \gamma =$

$u_\nu t_\nu \gamma = u_\nu \beta = p_\nu \alpha$. Nach Definition des Produkts folgt (1) aus den letzten beiden Gleichungen.

Beweis von (2): Es gilt $t_\nu \gamma' = \beta$ und $r_\mu \gamma' = p_\mu(u_\nu \times \text{id}_{X_\mu})\gamma' = p_\mu \alpha$; nach Definition des Produkts folgt $\gamma = \gamma'$.

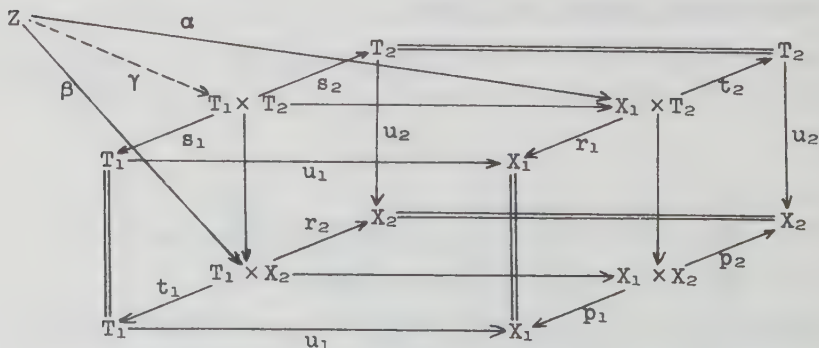
Wir behaupten nun:

(ii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T_1 \times T_2 & \xrightarrow{u_1 \times \text{id}_{T_2}} & X_1 \times T_2 \\
 \text{id}_{T_1} \times u_2 \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X_1} \times u_2 \\
 T_1 \times X_2 & \xrightarrow{u_1 \times \text{id}_{X_2}} & X_1 \times X_2
 \end{array}$$

ist ein kartesisches Quadrat.

Seien $\alpha: Z \rightarrow X_1 \times T_2$ und $\beta: Z \rightarrow T_1 \times X_2$ Morphismen mit $(\text{id}_{X_1} \times u_2)\alpha = (u_1 \times \text{id}_{X_2})\beta$. Seien noch $s_\nu: T_1 \times T_2 \rightarrow T_\nu$ ($\nu = 1, 2$) die Projektionen. Dann hat man das folgende kommutative Diagramm:



Sei $\gamma := (t_1 \beta, t_2 \alpha): Z \rightarrow T_1 \times T_2$. Dann gelten die Gleichungen

$$t_2(u_1 \times \text{id}_{T_2})\gamma = t_2\alpha, \quad r_1(u_1 \times \text{id}_{T_2})\gamma = r_1\alpha,$$

$$t_1(\text{id}_{T_1} \times u_2)\gamma = t_1\beta, \quad r_2(\text{id}_{T_1} \times u_2)\gamma = r_2\beta,$$

aus denen wegen der Eigenschaften des Produktes folgt:

$(u_1 \times \text{id}_{T_2})\gamma = \alpha$, $(\text{id}_{T_1} \times u_2)\gamma = \beta$. Durch diese beiden Gleichungen ist γ , wie man leicht sieht, eindeutig bestimmt.

Es ergibt sich nun:

(1.16) Das Diagramm $(*)$ in 1.15 ist genau dann kommutativ, wenn es Repräsentanten (T_v, u_v, v_v) von f_v gibt ($v = 1, 2$), derart, daß die Morphismen $\text{id}_{T_1} \times u_2: T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \times X_2$ und $u_1 \times \text{id}_{T_2}: T_1 \times T_2 \rightarrow X_1 \times T_2$ universelle Epimorphismen sind; dies gilt, falls $(*)$ kommutativ ist, für beliebige Repräsentanten.

Beweis. Seien (T_v, u_v, v_v) Repräsentanten von f_v . Wegen (i) ist das Diagramm $(*)$ genau dann kommutativ, wenn $(T_1 \times X_2, u_1 \times \text{id}_{X_2}, T_1 \times X_2 \rightarrow E) \sim (X_1 \times T_2, \text{id}_{X_1} \times u_2, X_1 \times T_2 \rightarrow E)$ gilt. Da $X_1 \times X_2 \times E$ und $X_1 \times X_2$ kanonisch isomorph sind, ist dies wegen (ii) genau dann der Fall, wenn $\text{id}_{T_1} \times u_2$ und $u_1 \times \text{id}_{T_2}$ universelle Epimorphismen sind.

Aus (i), (ii) und den Definitionen ergibt sich außerdem sofort:

(1.17) Seien $f_v = [(T_v, u_v, v_v)]: X_v \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$)

Korrespondenzen. Dann gilt

$$f_1 \times f_2 = [(T_1 \times T_2, u_1 \times u_2, v_1 \times v_2)] .$$

§ 2. Korrespondenzen in $\underline{Me}$ und $\underline{Top}$

Wir bezeichnen mit $\underline{Me}$ die Kategorie der Mengen und mit $\underline{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume. In $\underline{Me}$ und $\underline{Top}$ existieren Produkte und Faserprodukte; daher ist der Begriff der Korrespondenz in diesen Kategorien definiert.

a) In diesem Abschnitt sei stets $\underline{C} = \underline{Me}$ oder $\underline{C} = \underline{Top}$.

(2.1) Bemerkung. a) Es seien $f: X \rightarrow S$ und $g: Y \rightarrow S$ Morphismen in $\underline{C}$ und $F := \{(x,y) \in X \times Y: f(x)=g(y)\}$. Ferner seien Abbildungen $p: F \rightarrow X$, $q: F \rightarrow Y$ definiert durch $p(x,y) := x$, $q(x,y) := y$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & q & \\
 F & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 p \downarrow & & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & S
 \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat.

b) Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in $\underline{C}$ ist äquivalent:

- i) f ist surjektiv.
- ii) f ist ein Epimorphismus in $\underline{C}$.
- iii) f ist ein universeller Epimorphismus in $\underline{C}$.

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{C}$, und sei (T,u,v) ein Repräsentant von f . Setzt man $T^* := (u,v)(T) \subset X \times Y$ und bezeichnet man mit $u^*: T^* \rightarrow X$, $v^*: T^* \rightarrow Y$ die durch die Projektionen von $X \times Y$ auf X bzw. Y bestimmten Abbildungen, so ist, wie aus 2.1,b) folgt, auch (T^*,u^*,v^*) ein Repräsen-

tant von f . Ferner ist (T^*, u^*, v^*) eindeutig durch f bestimmt, d.h., ist auch (T', u', v') Repräsentant von f , so gilt $(u, v)(T) = (u', v')(T')$. Wir nennen (T^*, u^*, v^*) den eingebetteten Repräsentanten von f .

Definition. Es seien $f_v: X \rightarrow Y$, $v = 1, 2$, Korrespondenzen in $\underline{C}$ mit den eingebetteten Repräsentanten (T_v, u_v, v_v) . Dann heißt f_1 in f_2 enthalten, in Zeichen $f_1 \subset f_2$, wenn $T_1 \subset T_2$ gilt.

Definition. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{C}$, und sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f .

a) f heißt leer, in Zeichen: $f = \emptyset$, wenn $T = \emptyset$ ist.

b) Ist A eine Teilmenge von X und ist $i: A \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung, so heißt die Korrespondenz $f|_A: A \rightarrow Y$ die Beschränkung von f auf A und wird mit $f|_A: A \rightarrow Y$ bezeichnet.

c) Das Bild von f ist die Menge $f(X) := v(u^{-1}(X))$.

d) Das Urbild von f ist definiert als das Bild der Korrespondenz $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

e) Ist A eine Teilmenge von X , so sei $f(A)$ das Bild von $f|_A: A \rightarrow Y$.

f) f heißt surjektiv, wenn v surjektiv ist.

g) f heißt injektiv, wenn es einen Repräsentanten (T', u', v') von f gibt, derart, daß v' injektiv ist.

Wegen 2.1, b) sind die Begriffe surjektiv, epimorph und universell-epimorph für Korrespondenzen in $\underline{C}$ äquivalent; ferner ist eine Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ genau dann surjektiv,

wenn $f(X) = Y$ gilt. Ebenso sind die Begriffe injektiv und monomorph für Korrespondenzen in C äquivalent.

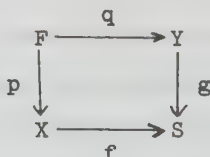
b) Für den Rest von § 2 beschränken wir uns auf den Fall C = Top .

Definition. Es seien X, Y topologische Räume. Eine Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ in Top heißt stetige Korrespondenz von X nach Y , wenn es einen Repräsentanten (T, u, v) von f gibt, derart, daß u eine eigentliche Abbildung ist. Eine stetige Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ heißt eigentlich, wenn auch $f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist.

Zum Begriff der eigentlichen Abbildung vgl. N. Bourbaki [2, Ch. I, § 10]. Man zeigt leicht: Ist (T^*, u^*, v^*) der eingebettete Repräsentant einer Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ und ist f stetig, so ist u^* eigentlich; ist f eigentlich, so sind u^* und v^* eigentlich.

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

(2.2) Das Diagramm



sei ein kartesisches Quadrat in Top . Ist g eigentlich, so ist auch p eigentlich.

Beweis. Bis auf kanonische Isomorphie ist wegen 2.1,a):

$$F = \{(x, y) \in X \times Y: f(x) = g(y)\}$$

und $p(x, y) := x$, $q(x, y) := y$. Sei $A \subset F$ eine abgeschlossene Teilmenge, und sei $A^* \subset X \times Y$ eine abgeschlossene Menge mit $A^* \cap F = A$. Da g eigentlich ist, ist $\text{id}_X \times g: X \times Y \rightarrow X \times S$ abgeschlossen und daher $(\text{id}_X \times g)(A^*) \subset X \times S$ abgeschlossen. Sei F' das Faserprodukt von $f: X \rightarrow S$ und $\text{id}_S: S \rightarrow S$, also

$$F' = \{(x, s) \in X \times S: f(x) = s\}.$$

Dann ist $A' := (\text{id}_X \times g)(A) = (\text{id}_X \times g)(A^*) \cap F'$ abgeschlossen in F' . Da F' Faserprodukt ist, ist mit id_S auch

$$t: F' \rightarrow X$$

$$(x, s) \mapsto x$$

ein Homöomorphismus; somit ist $t(A') = p(A)$ abgeschlossen in X . Daher ist p abgeschlossen.

Für jedes $x_1 \in X$ ist

$$\bar{p}^{-1}(x_1) = \{(x_1, y) \in X \times Y: f(x_1) = g(y)\} = \bar{g}^{-1}(f(x_1)) \times \{x_1\};$$

da $\bar{g}^{-1}(f(x_1))$ quasi-kompakt ist, ist somit auch $\bar{p}^{-1}(x_1)$ quasi-kompakt. Also ist p eigentlich.

(2.3) a) Komposition, Verbindung und Produkt stetiger

Korrespondenzen sind stetig.

b) Komposition und Produkt eigentlicher Korrespondenzen

sind eigentlich.

c) Ist $f_1: X \rightarrow Y_1$ eine eigentliche und $f_2: X \rightarrow Y_2$ eine

stetige Korrespondenz, so ist $(f_1, f_2): X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ eigentlich.

d) Sind $f_v: X_v \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$) nicht-leere Korrespondenzen und ist $f_1 \times f_2$ stetig (bzw. eigentlich), so sind f_1 und f_2 stetig (bzw. eigentlich).

Beweis. Die Aussagen bzgl. Komposition und Verbindung folgen unmittelbar aus 2.2 ; die Aussagen bzgl. des Produktes folgen aus N. Bourbaki [2, Ch. 10, n° 1, Prop. 4] .

(2.4) Es seien X, Y, Z topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ stetige Korrespondenzen. Dann gilt:

- a) Ist gf eigentlich und ist g injektiv sowie g^{-1} surjektiv, so ist f eigentlich.
- b) Ist gf eigentlich und ist f surjektiv sowie f^{-1} injektiv, so ist g eigentlich.

Beweis. a) Nach 1.9 gilt $g^{-1}g = \text{id}_Y$; daraus folgt $f^{-1} = f^{-1}(g^{-1}g) = (f^{-1}g^{-1})g = (gf)^{-1}g$. Nach 2.3, a) ist daher f^{-1} stetig.

b) Wie unter a) schließt man: $g^{-1} = f(gf)^{-1}$.

Bemerkung. Für lokal-kompakte Räume wurde die Aussage 2.4 von K. Stein [15, Prop. 3.3.2] ohne die Voraussetzung " g (bzw. f^{-1}) injektiv" bewiesen.

§ 3. Holomorphe Korrespondenzen

Wir bezeichnen mit Kom die Kategorie der komplexen Räume, die als hausdorffsch, aber nicht als reduziert vorausgesetzt werden. In [7, Exp. 10] wurde gezeigt, daß in Kom direkte Produkte und Faserprodukte existieren; daher ist der Begriff der Korrespondenz in Kom definiert.

Ist X ein komplexer Raum, so bezeichnen wir den zugrundeliegenden topologischen Raum mit $|X|$ und die Strukturgarbe von X mit $\mathcal{O}_X$. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir manchmal von dieser Bezeichnung abweichen und z.B. sowohl eine offene Menge $U \subset |X|$ als auch den offenen komplexen Unterraum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ von X mit dem Buchstaben U bezeichnen. Ist $A \subset |X|$ eine abgeschlossene Teilmenge, so bezeichnen wir den offenen Unterraum $(|X| - A, \mathcal{O}_X|_{|X| - A})$ von X kurz mit $X - A$.

Es seien X, Y komplexe Räume. Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist ein Paar $(|f|, *_f)$, bestehend aus einer stetigen Abbildung $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ und aus einem Garbenhomomorphismus $*_f: \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$ von $\mathcal{O}_Y$ in die direkte Bildgarbe $|f|_* \mathcal{O}_X$. Die Begriffe "komplexer Unterraum" und "Immersion" (Einbettungsabbildung) werden wie in [7, Exp. 9] verwendet.

Die Zuordnungen $X \mapsto |X|$, $f \mapsto |f|$ stellen einen kovarianten Funktor $|\cdot|: \text{Kom} \rightarrow \text{Top}$ dar.

Definition. Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt Surjektion, wenn gilt:

1. Die stetige Abbildung $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ ist surjektiv.
2. Für jedes $y \in |Y|$ ist der Homomorphismus

$*^f_Y: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_* \mathcal{O}_X)_y$ injektiv.

Die folgenden Aussagen sind leicht zu beweisen und zum Teil in [7, Exp. 9] enthalten.

(3.1) a) Eine Surjektion ist ein Epimorphismus in Kom.

b) Eine Immersion ist ein Monomorphismus in Kom.

c) Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann biholomorph, wenn sie Surjektion und Immersion ist.

d) Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Surjektionen (bzw. Immersionen), so auch gf .

e) Ist gf eine Surjektion, so auch g .

f) Ist gf eine Immersion, so auch f .

g) Ist

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{q} & Y \\
 p \downarrow & & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & S
 \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat und ist f eine Immersion, so ist auch q eine Immersion.

Darüber hinaus gilt:

(3.2) Ein universeller Epimorphismus in Kom ist eine Surjektion.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein universeller Epimorphismus in Kom. Nehmen wir an, daß $|f|$ nicht surjektiv ist. Dann existiert ein $y \in |Y| - |f|(|X|)$. Faßt man $\{y\}$ als reduzierten

abgeschlossenen Unterraum von Y auf, so erhält man ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{y\} & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

wobei die holomorphe Abbildung $\emptyset \rightarrow \{y\}$ offensichtlich kein Epimorphismus in $\underline{\text{Kom}}$ ist. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß f universeller Epimorphismus in $\underline{\text{Kom}}$ ist.

Wir zeigen nun, daß $*f_y$ für jedes $y \in |Y|$ injektiv ist. Sei $y \in |Y|$, und sei $\mathfrak{M}_y$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$. Sei weiter $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_Y$ die durch $\mathfrak{M}(V) := \{s \in \mathcal{O}_Y(V) : s_y \in \mathfrak{M}_y\}$, $V \subset |Y|$ offen, definierte Idealgarbe in $\mathcal{O}_Y$, und sei Z_n der durch die Idealgarbe $\mathfrak{M}^n$ definierte einpunktige Unterraum von Y ($n \in \mathbb{N}$); es ist $|Z_n| = \{y\}$. Setzt man $W_n := Z_n \times_Y X$, so hat man für jedes n einen Epimorphismus $p_n: W_n \rightarrow Z_n$. Wir zeigen weiter unten, daß der zugehörige Homomorphismus

$$*(p_n)_y: \mathcal{O}_{Z_n,y} \rightarrow (|p_n|_* \mathcal{O}_{W_n})_y = \mathcal{O}_{W_n}(W_n)$$

injektiv ist. Hieraus ergibt sich die Behauptung in der folgenden Weise:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{W_n}(W_n) & \longleftarrow & (|f|_* \mathcal{O}_X)_y \\ \uparrow *(p_n)_y & & \uparrow *f_y \\ \mathcal{O}_{Z_n,y} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{Y,y} \end{array}$$

Da $*(p_n)_y$ injektiv ist, gilt

$$\text{Ker } *f_y = \text{Ker } (\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_n,y}) = \mathfrak{M}_y^n,$$

wegen $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_y^n = (0)$ folgt hieraus die Injektivität von $*f_y$.

Es bleibt zu zeigen, daß $*(p_n)_y$ injektiv ist. Nehmen wir an, daß ein Element $a \neq 0$ von $\mathcal{O}_{Z_n,y}$ existiert mit $*(p_n)_y(a) = 0$. a kann keine Einheit von $\mathcal{O}_{Z_n,y}$ sein; in diesem Fall würde nämlich $*(p_n)_y \equiv 0$ folgen, also $\mathcal{O}_{W_n}(w_n) = 0$ und somit $|W_n| = \emptyset$, im Widerspruch dazu, daß $|f|$ surjektiv ist. Aus der Definition von $\mathcal{O}_{Z_n,y} = \mathcal{O}_{Y,y} / \mathfrak{M}_y^n$ folgt, daß a nilpotent ist; daher gilt $\mathbb{C}[a] \cong \mathbb{C}[a]$. Für die durch $*^{\rho}(a) := 0$ bzw.

$*^{\sigma}(a) := a$ definierten Homomorphismen $*^{\rho}, *^{\sigma}: \mathbb{C}[a] \rightarrow \mathcal{O}_{Z_n,y}$ gilt offensichtlich $*(p_n)_y *^{\rho} = *(p_n)_y *^{\sigma}$, aber $*^{\rho} \neq *^{\sigma}$. Hieraus ergibt sich ein Widerspruch dazu, daß p_n ein Epimorphismus ist. Um dies einzusehen, muß man noch zeigen, daß $\mathbb{C}[a]$ eine nulldimensionale analytische Algebra ist; denn dann entsprechen den Homomorphismen $*^{\rho}, *^{\sigma}$ holomorphe Abbildungen ρ, σ von Z_n auf den einpunktigen komplexen Raum mit der Strukturgarbe $\mathbb{C}[a]$, für die gilt: $\rho p_n = \sigma p_n$, aber $\rho \neq \sigma$. Sei t eine Unbestimmte. Der durch $t \mapsto a$ gegebene Homomorphismus $\psi: \mathbb{C}\{t\} \rightarrow \mathbb{C}[a]$ ist surjektiv, also gilt $\mathbb{C}[a] \cong \mathbb{C}\{t\} / \text{Ker } \psi$. Wegen $\text{Ker } \psi \neq (0)$ folgt hieraus leicht, daß $\mathbb{C}[a]$ eine nulldimensionale Algebra ist.

Die Umkehrung von 3.2 ist nicht richtig, wie das folgende Beispiel beweist:

(3.3) Beispiel. Es sei N die Neilsche Parabel, d.h. $|N| := \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) und $\mathcal{O}_N(U) := \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U): f_0 \in \mathbb{C}\{z^2, z^3\}, \text{ falls } 0 \in U\}$ für offene Mengen $U \subset |N| = \mathbb{C}$; dabei sei z die Koordinatenfunktion in $\mathbb{C}$. Wir

definieren eine Abbildung $\pi: \mathbb{C} \rightarrow N$, indem wir $|\pi| := \text{id}_{\mathbb{C}}$ setzen und für jede offene Menge $U \subset |N|$ als Homomorphismus $\pi_U: \mathcal{O}_N(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ die Inklusionsabbildung nehmen. Dann ist π eine Surjektion; wir zeigen, daß π kein universeller Epimorphismus in Kom ist.

Es sei A derjenige abgeschlossene komplexe Unterraum von N , der durch die durch die Funktion z^2 erzeugte Idealgarbe $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_N$ definiert ist. Sei $B := \pi^{-1}(A)$ und $\rho := \pi|_B: B \rightarrow A$, d.h., B und ρ sind durch das kartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

definiert. Dann wird B als abgeschlossener komplexer Unterraum von $\mathbb{C}$ durch die durch die Funktion z^2 in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ erzeugte Idealgarbe $\mathfrak{G}$ definiert. Wäre π ein universeller Epimorphismus, so wäre es auch ρ ; nach 3.2 wäre dann der Homomorphismus $*\rho_0: \mathbb{C}\{z^2, z^3\} / z^2\mathbb{C}\{z^2, z^3\} \rightarrow \mathbb{C}\{z\} / z^2\mathbb{C}\{z\}$ injektiv. Es ist aber $\text{Ker } *\rho_0 = (z^2\mathbb{C}\{z^2, z^3\} + z^3\mathbb{C}\{z^2, z^3\}) / z^2\mathbb{C}\{z^2, z^3\} \neq (0)$.

In einem Spezialfall ist allerdings eine Umkehrung von 3.2 richtig. Wir verwenden, wie bereits in dem obigen Beispiel, die folgende Bezeichnung:

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, Y' ein komplexer Unterraum von Y mit der kanonischen Immersion j und

$$\begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 X' & \longrightarrow & Y' \\
 \downarrow i & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat. Dann heißt X' das Urbild von Y' bei der Abbildung f und wird mit $f^{-1}(Y')$ bezeichnet; statt f' schreiben wir auch $f|_{X' \rightarrow Y'}$.

(3.4) Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Surjektion und V ein offener komplexer Unterraum von Y . Dann ist $f' := f|_{f^{-1}(V)}: f^{-1}(V) \rightarrow V$ eine Surjektion.

Beweis. Nach [7, Exp. 10, Th. 2.1] ist der Funktor $|\cdot|: \underline{\text{Kom}} \rightarrow \underline{\text{Top}}$ mit der Bildung des Faserprodukts vertauschbar. Daraus folgt: $|f^{-1}(V)| = |f^{-1}|(|V|)$; somit ist $|f'|$ surjektiv. Für jedes $y \in |V|$ gilt $*f'_y = *f_y$; hieraus folgt die Behauptung.

Aus 3.4 folgt: Für eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist der Begriff Surjektion lokal bzgl. Y , d.h., f ist genau dann Surjektion, wenn es zu jedem $y \in |Y|$ eine Umgebung V bzgl. Y gibt, so daß $f|_{f^{-1}(V)}: f^{-1}(V) \rightarrow V$ eine Surjektion ist.

Sei $f: X \multimap Y$ eine Korrespondenz in $\underline{\text{Kom}}$, und sei (T, u, v) ein Repräsentant von f . Wir setzen

$$|f| := [(|T|, |u|, |v|)]: |X| \multimap |Y|;$$

diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (T, u, v) . Die Zuordnungen $X \mapsto |X|$, $f \mapsto |f|$ stellen

einen kovarianten Funktor $|\cdot|: \underline{\text{Kom}}K \rightarrow \underline{\text{Top}}K$ dar.

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{\text{Kom}}$. f heißt **h o l o m o r p h e** **K o r r e s p o n d e n z**, wenn $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ eine stetige Korrespondenz ist.

Aus 2.3,a) folgt:

(3.5) Komposition, Verbindung und Produkt holomorpher Korrespondenzen sind holomorph.

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in $\underline{\text{Kom}}$ und X' ein komplexer Unterraum von X mit der kanonischen Immersion $j: X' \rightarrow X$. Die Korrespondenz $fj: X' \rightarrow Y$ heißt **B e s c h r ä n k u n g** von f auf X' und wird mit $f|X' \rightarrow Y$ bezeichnet.

Nach 3.5 ist die Beschränkung einer holomorphen Korrespondenz wieder holomorph.

Bei der weiteren Betrachtung der holomorphen Korrespondenzen ist der Begriff des Bildes einer holomorphen Abbildung von Wichtigkeit.

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Ein komplexer Unterraum $Y' \subset Y$ heißt **B i l d** von f (in Zeichen: $Y' = f(X)$), wenn gilt:

a) Es gibt eine holomorphe Abbildung $f': X \rightarrow Y'$ mit

$f = j'f'$, wobei $j': Y' \rightarrow Y$ die kanonische Immersion ist.

b) Ist $Y'' \subset Y$ ein weiterer komplexer Unterraum mit der kanonischen Immersion $j'': Y'' \rightarrow Y$ und gibt es eine holomorphe Abbildung $f'': X \rightarrow Y''$ mit $f = j''f''$, so existiert eine holomorphe Abbildung $g: Y' \rightarrow Y''$ mit $j' = j''g$.

(3.6) Ist $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung (d.h.: $|f|$ ist eigentlich), so existiert das Bild $f(X)$; es ist ein abgeschlossener komplexer Unterraum von Y . Die holomorphe Abbildung $f': X \rightarrow f(X)$ (vgl. Bedingung a) der Definition) ist eigentlich und eine Surjektion.

Beweis. Da $|f|$ eigentlich ist, ist $|f|_* \mathcal{O}_X$ eine kohärente analytische Garbe auf Y (vgl. H. Grauert [5]); daher ist die Annulatorgarbe $\mathfrak{F} := \text{Ann}_{\mathcal{O}_Y} |f|_* \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe in $\mathcal{O}_Y$ (vgl. [6]). Sei $Y' = f(X)$ der durch diese Idealgarbe definierte abgeschlossene Unterraum von Y . Man sieht leicht: $|f(X)| = |f|(|X|)$, daher ergibt die Festsetzung $|f'|(|x|) := |f|(|x|)$ für $x \in |X|$ eine surjektive, eigentliche Abbildung $|f'|: |X| \rightarrow |f(X)|$. Für jedes $y \in |Y|$ ist $\mathfrak{F}_y = \text{Ker} (*f_y: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_* \mathcal{O}_X)_y)$; daher läßt sich $*f_y$ auf die folgende Weise faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{*f_y} & (|f|_* \mathcal{O}_X)_y \\
 \downarrow & \nearrow *f'_y & \\
 \mathcal{O}_{Y,y} / \mathfrak{F}_y & &
 \end{array}$$

und der so erhaltene Homomorphismus $*f'_y$ ist injektiv.

Sei $Y'' \subset Y$ ein komplexer Unterraum wie in Bedingung b)

Definition. Sei (F, p', p'') das Faserprodukt von $j': Y' \rightarrow Y$ und $j'': Y'' \rightarrow Y$; dann sind p' und p'' Immersionen. Es gibt eine holomorphe Abbildung $h: X \rightarrow F$ mit $f' = p'h$; aus 3.1,e) folgt, daß p' auch Surjektion ist. Nach 3.1,c) ist p' biholomorph. Setzt man $g := p''p'^{-1}$, so gilt $j' = j''g$.

Bemerkung. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung und $X' \subset X$ ein abgeschlossener komplexer Unterraum mit der kanonischen Immersion $i: X' \hookrightarrow X$. Dann ist auch $fi: X' \rightarrow Y$ eigentlich und daher das Bild $(fi)(X')$ definiert. Man schreibt zur Abkürzung

$$f(X') := (fi)(X') .$$

Nach Definition des Bildes existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow f(X')$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & f(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Die Abbildung f' bezeichnen wir auch mit $f|_{X'} \rightarrow f(X')$ (Einschränkung von f).

Die Aussage 3.6 besitzt die folgende einfache Verallgemeinerung:

(3.7) Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Es existiere ein offener Unterraum Z

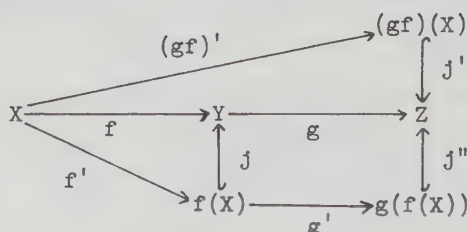
von Y mit der kanonischen Immersion i und eine eigentliche holomorphe Abbildung $g: X \rightarrow Z$ mit $f = gi$. Dann besitzt f ein Bild.

Beweis. Man sieht sofort, daß $g(X)$ auch Bild bzgl. f ist.

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

(3.8) Es seien X, Y, Z komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ eigentliche holomorphe Abbildungen. Dann gilt $(gf)(X) = g(f(X))$.

Beweis. Nach Definition des Bildes gibt es ein kommutatives Diagramm



Sei (F, p', p'') das Faserprodukt von $j': (gf)(X) \rightarrow Z$ und $j'': g(f(X)) \rightarrow Z$; die holomorphen Abbildungen p' und p'' sind Immersionen. Es gibt eine holomorphe Abbildung $h: X \rightarrow F$ mit $p'h = (gf)'$ und $p''h = g'f'$. Aus 3.6 und 3.1 folgt, daß p' und p'' auch Surjektionen und damit biholomorph sind; daraus folgt: $(gf)(X) = g(f(X))$.

Definition. Sei $f: X \dashrightarrow Y$ eine holomorphe Korrespondenz und (T, u, v) ein Repräsentant von f , derart, daß u eigentlich ist. Der abgeschlossene Unterraum von X

$$f^{-1}(Y) := u(T)$$

heißt **U r b i l d** von f .

Beweis der Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl des Repräsentanten: Sei $f = [(T_v, u_v, v_v)]$, $v = 1, 2$; die Abbildungen u_v seien eigentlich. Sei (F, p_1, p_2) das Faserprodukt von $(u_1, v_1): T_1 \rightarrow X \times Y$ und $(u_2, v_2): T_2 \rightarrow X \times Y$. Nach 2.2 sind die p_v eigentlich, also ist $p_v(F)$ definiert ($v = 1, 2$). Da die p_v ferner universelle Epimorphismen sind, insbesondere Surjektionen, folgt auf einfache Weise: $p_v(F) = u_v(T_v)$ ($v = 1, 2$). Wegen $u_1 p_1 = u_2 p_2$ und wegen 3.8 gilt $u_1(T_1) = (u_1 p_1)(F) = (u_2 p_2)(F) = u_2(T_2)$.

Definition. Sei $f: X \dashrightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Korrespondenz (d.h.: $|f|$ ist eigentlich). Dann heißt

$$f(X) := (f^{-1})^{-1}(X)$$

das **B i l d** von f .

Diese Definition ist sinnvoll, da, falls f eigentlich ist, die Umkehrkorrespondenz f^{-1} holomorph ist. Ist (T, u, v) ein Repräsentant von f , derart, daß v eigentlich ist, so gilt: $f(X) = v(T)$.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Korrespondenz, $X' \subset X$ ein komplexer Unterraum mit der kanonischen Immersion i und ist $fi: X' \rightarrow Y$ eigentlich (dies ist erfüllt, wenn $|X'|$ kompakt ist oder wenn f eigentlich und X' ein abgeschlossener Unterraum ist), so ist $(fi)(X')$ definiert; in diesem Fall setzen wir

$$f(X') := (fi)(X') .$$

Ist weiter $Y' \subset Y$ ein komplexer Unterraum mit der kanonischen Immersion j , so setzen wir

$$f^{-1}(Y') := (f^{-1}j)^{-1}(Y') .$$

Das Bild bei einer holomorphen Korrespondenz läßt sich auch durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren, die in Analogie zur Definition des Bildes bei holomorphen Abbildungen steht. Zur Herleitung dieser universellen Eigenschaft benötigen wir den folgenden Begriff:

Definition. Seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in Kom. f heißt **s u r j e k t i v**, wenn es einen Repräsentanten (T, u, v) von f gibt, derart, daß v eine Surjektion ist.

(3.9) a) Ist die Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ surjektiv und ist (T, u, v) ein beliebiger Repräsentant von f , so ist v eine Surjektion.

b) Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Korrespondenzen in Kom und ist gf surjektiv, so ist auch g surjektiv.

c) Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann eine Surjektion, wenn sie als Korrespondenz surjektiv ist.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen und aus 3.1.

(3.10) Universelle Eigenschaft des Bildes. Seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Korrespondenz. Sei $j: f(X) \rightarrow Y$ die kanonische Immersion.

a) Es gibt eine holomorphe Korrespondenz $f': X \rightarrow f(X)$ mit $f = j f'$.

b) Ist $Y'' \subset Y$ ein komplexer Unterraum mit der kanonischen Immersion j'' und existiert eine holomorphe Korrespondenz $f'': X \rightarrow Y''$ mit $f = j'' f''$, so gibt es eine holomorphe Abbildung $g: f(X) \rightarrow Y''$ mit $j = j'' g$.

Ferner sind g und f' eindeutig bestimmt; f' ist eigentlich und surjektiv.

Beweis. Nach 1.10,b) sind f' und g eindeutig bestimmt. Sei (T, u, v) ein Repräsentant von f , derart, daß v eigentlich ist. Dann gibt es eine eigentliche Surjektion $v': T \rightarrow f(X)$ mit $v = j v'$. Sei $f' := [(T, u, v')]$; dann ist f' eigentlich und surjektiv, und es gilt $f = j f'$.

Sei nun $Y'' \subset Y$ ein Unterraum wie in b). Sei (F, p, p'') das Faserprodukt von $j: f(X) \rightarrow Y$ und $j'': Y'' \rightarrow Y$; p und p'' sind Immersionen. Wegen $j f' = j'' f'' = f$ und wegen 1.11 gibt es eine Korrespondenz $h: X \rightarrow F$ mit $ph = f'$ und $p''h = f''$. Da f' surjektiv ist, ist p nach 3.9 eine Surjektion; also ist p biholomorph. Mit $g := p''p^{-1}$ folgt die Behauptung.

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in Kom und $x \in |X|$. Dann heißt f im Punkt x eine holomorphe Abbildung, wenn es eine offene Umgebung U von x bzgl. X gibt, so daß $f|U \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung ist.

Wir bezeichnen mit $\Sigma(f)$ die Menge der Punkte $x \in |X|$, in denen f keine holomorphe Abbildung ist.

Nach Definition ist $\Sigma(f)$ stets abgeschlossen.

Man sieht leicht: Eine Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn $\Sigma(f) = \emptyset$ ist.

§ 4. Primärzerlegung komplexer Räume

Definition. Sei X ein komplexer Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset |X|$ heißt *analytisch dünn* in X , wenn für jede offene Menge $U \subset |X|$ der Beschränkungs-homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U - A)$$

injektiv ist.

(4.1) Es sei X ein komplexer Raum.

- a) Ist A analytisch dünn in X , so gilt $\overline{|X| - A} = |X|$.
- b) Sei A analytisch dünn in X und $B \subset A$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist B analytisch dünn in X .
- c) Es seien A_ν , $\nu \in I$, analytisch dünne Teilmengen von X . Dann ist $\bigcap_{\nu \in I} A_\nu$ analytisch dünn in X .

Beweis. a) Nehmen wir an: $\mathring{A} \neq \emptyset$. Sei $U := \mathring{A} \cup (|X| - A)$. Definiert man eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}_X(U)$ durch $f|_{\mathring{A}} := 1$, $f|_{|X| - A} := 0$, so gilt $f \neq 0$, aber $f|_{|X| - A} = 0$. Somit ist A nicht analytisch dünn in X .

b) ist trivial; c) folgt aus b).

Das folgende Lemma gibt ein Kriterium dafür an, daß eine analytische Menge analytisch dünn ist. Hierzu konstruieren wir nach Siu [13] (vgl. auch Thimm [18] und Fujimoto [4]) ein ausgezeichnetes System analytischer Mengen, das sogenannte Komponentensystem des komplexen Raumes.

Definition. Sei X ein komplexer Raum und $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Dann sei

$$E^k := E_X^k := \{x \in |X| : \text{Es gibt eine offene Umgebung } U \text{ von } x \text{ bzgl. } |X|, \text{ eine analytische Menge } A \subset U \text{ mit } \dim A \leq k \text{ und eine holomorphe Funktion } f \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f|_{U-A} = 0 \text{ und } f_x \neq 0\}$$

In [13, Th. 3] wurde bewiesen (vgl. auch [19, Satz 3]): Die Punktmengen E^k , $k \geq 0$, sind analytische Mengen mit $\dim E^k \leq k$. Ist $d := \dim X$, so gilt offensichtlich: $E^0 \subset E^1 \subset \dots \subset E^d = |X|$.

Definition. Die Menge der nicht-leeren irreduziblen Komponenten der analytischen Mengen E^k , $k \geq 0$, heißt **Komponentensystem** von X und wird mit $\mathfrak{M}_X$ bezeichnet.

Bemerkung. Nach Definition ist $\mathfrak{M}_X$ lokal endlich.

(4.2) Lemma. Sei X ein komplexer Raum. Eine analytische Menge $A \subset |X|$ ist genau dann analytisch dünn in X , wenn für jedes $B \in \mathfrak{M}_X$ gilt: $B \not\subset A$.

Beweis. a) A sei nicht analytisch dünn in X . Nehmen wir an, es gelte $B \not\subset A$ für alle $B \in \mathfrak{M}_X$. Sei $k := \dim A$, $A^k := A$ und $A^{\kappa-1} := A^\kappa \cap E^\kappa$ für $1 \leq \kappa \leq k$. Wir beweisen durch vollständige Induktion für $0 \leq \kappa \leq k$:

(1) A^κ ist nicht analytisch dünn in X .

(2) $\dim A^\kappa \leq \kappa$.

(3) Für alle $B \in \mathfrak{M}_X$ gilt $B \not\subset A^\kappa$.

Die Aussagen (1) - (3) sind nach Annahme richtig für $\kappa = k$. Nehmen wir an, sie seien richtig für κ . Wegen (1) gibt es ein $x \in A^\kappa$, eine offene Umgebung U von x bzgl. $|X|$ und ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f|_{U-A^\kappa} = 0$ und $f_x \neq 0$. Für jedes $y \in U$ mit $f_y \neq 0$ folgt $y \in E^\kappa$; also gilt $f|_{U-E^\kappa} = 0$ und daher $f|_{U-A^{\kappa-1}} = 0$. Somit ist $A^{\kappa-1}$ nicht analytisch dünn in X . Da A^κ keine irreduzible Komponente von E^κ enthält, gilt $\dim A^{\kappa-1} < \dim E^\kappa \leq \kappa$ und hiermit (2). Wegen $A^{\kappa-1} \subset A^\kappa$ gilt (3).

Für $\kappa = 0$ ergibt sich nun ein Widerspruch. Denn da A^0 nicht analytisch dünn ist, gibt es ein $x \in A^0 \cap E^0$. Dann gilt $\{x\} \in \mathfrak{M}_X$ und $\{x\} \subset A^0$.

b) Es existiere ein $B \in \mathfrak{M}_X$ mit $B \subset A$; B sei irreduzible Komponente von E^k . Es gibt ein $x \in B$, eine offene Umgebung U von x bzgl. $|X|$, die die übrigen irreduziblen Komponenten von E^k nicht trifft, eine analytische Menge $C \subset U$ mit $\dim C \leq k$ und ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f|_{U-C} = 0$ und $f_x \neq 0$. Für jedes $y \in U$ mit $f_y \neq 0$ folgt $y \in E^k$, also $y \in B$; somit gilt $f|_{U-B} = 0$, also auch $f|_{U-A} = 0$. Daher ist A nicht analytisch dünn in X .

(4.3) Corollar. Es sei X ein komplexer Raum und $(A_v: v \in I)$ eine lokal-endliche Familie von analytisch dünnen analytischen Mengen in X . Dann ist auch $A := \bigcup_{v \in I} A_v$ analytisch dünn in X .

Beweis. Nehmen wir an, A sei nicht analytisch dünn in X . Nach 4.2 gibt es ein $B \in \mathfrak{M}_X$ mit $B \subset A$. Da B irreduzibel ist, gibt es eine irreduzible Komponente A' von A mit $B \subset A'$. Wäre $A' \not\subset A_v$ für alle $v \in I$, so würde folgen: $A' = \bigcup_{v \in I} (A' \cap A_v)$, $A' \cap A_v \neq A'$ ($v \in I$), im Widerspruch zur Irreduzibilität von A' . Somit gilt $B \subset A' \subset A_v$ für ein $v \in I$. Nach 4.2 ist A_v nicht analytisch dünn in X . Widerspruch.

Wir betrachten nun komplexe Räume, in denen eine nirgends-dichte analytische Menge stets analytisch dünn ist.

Definition. Ein komplexer Raum X heißt **p r i m ä r**, wenn gilt:

1. Die Punktmenge $|X|$ ist eine irreduzible analytische Menge.
2. Ist U ein offener komplexer Unterraum von X und $A \subset |U|$ eine analytische Menge mit $A \neq |U|$, so ist A analytisch dünn in U .

Ein komplexer Raum X ist offenbar genau dann primär, wenn $\mathfrak{M}_X = \{|X|\}$ gilt.

Der folgende Satz deutet bereits an, daß der Begriff des primären komplexen Raumes eine sinnvolle Verallgemeinerung des Begriffs des irreduziblen reduzierten komplexen Raumes ist.

(4.4) Identitätssatz für primäre Unterräume (vgl. [4, Th. 3.2]). Es sei X ein komplexer Raum, und es seien X' , X'' abgeschlossene komplexe Unterräume von X , definiert

durch kohärente Idealgarben $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'' \subset \mathcal{O}_X$. Ferner sei X' primär. Gilt dann $\mathfrak{F}'_x \supset \mathfrak{F}''_x$ für einen Punkt $x \in |X'|$, so folgt $\mathfrak{F}'_y \supset \mathfrak{F}''_y$ für alle $y \in |X|$, also $X' \subset X''$.

Wir beweisen statt 4.4 gleich den folgenden allgemeineren Satz:

(4.5) Allgemeiner Identitätssatz für komplexe Unterräume.

Es sei X ein komplexer Raum, und es seien X', X'' abgeschlossene komplexe Unterräume von X , definiert durch kohärente Idealgarben $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'' \subset \mathcal{O}_X$. Es existiere eine Punktmenge $D \subset |X|$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $D \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_{X'}$.
- (2) $\mathfrak{F}'_x \supset \mathfrak{F}''_x$ für jeden Punkt $x \in D$.

Dann folgt $X' \subset X''$.

Beweis. Sei $Y := X' \cap X''$, d.h. $Y := X' \times_X X''$. Dann ist Y ein abgeschlossener komplexer Unterraum von X' und wird durch die kohärente Idealgarbe $\mathfrak{F} := (\mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'') / \mathfrak{F}'|_{|X'|}$ definiert. Für jeden Punkt $x \in D$ gilt $\mathfrak{F}'_x \supset \mathfrak{F}''_x$, also $\mathfrak{F}_x = 0$. Daher ist der Durchschnitt von D mit dem Träger von $\mathfrak{F}$, also der analytischen Menge $|\mathfrak{F}| := \{x \in |X'| : \mathfrak{F}_x \neq (0)\}$, leer; wegen (1) folgt hieraus $A \not\subset |\mathfrak{F}|$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_{X'}$. Nach 4.2 ist $|\mathfrak{F}|$ analytisch dünn in X' . Ist $U \subset |X'|$ offen und $f \in \mathfrak{F}(U)$, so gilt $f|_{U - |\mathfrak{F}|} = 0$; daraus folgt $f = 0$. Somit gilt $\mathfrak{F} = 0$, also $Y = X'$ und daher $X' \subset X''$.

Die folgenden Hilfssätze werden in § 6 benötigt.

(4.6) Hilfssatz. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Surjektion und $B \subset |Y|$ eine analytische Menge, derart, daß $A := f^{-1}(B)$ analytisch dünn in X ist. Dann ist B analytisch dünn in Y .

Beweis. Sei $V \subset |Y|$ eine offene Menge, $U := f^{-1}(V)$ und $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$ mit $\varphi|_{V-B} = 0$. Dann ist $*f_V(\varphi)|_{U-A} = *f_{V-B}(\varphi|_{V-B}) = 0$. Da A analytisch dünn ist, folgt $*f_V(\varphi) = 0$. Für jedes $y \in V$ gilt somit $*f_y(\varphi_y) = 0$; daraus folgt, da $*f_y$ injektiv ist: $\varphi_y = 0$. Also gilt $\varphi = 0$.

(4.7) Hilfssatz. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Surjektion. Ferner sei X primär. Dann ist auch Y primär.

Beweis. Man sieht leicht, daß $|Y|$ irreduzibel ist. Sei V ein offener Unterraum von Y , $U := f^{-1}(V)$ und $B \subset |V|$, $B \neq |V|$, eine analytische Menge. Nach 3.4 ist $f' := f|_{U \rightarrow V}$ eine Surjektion. Sei $A := f'^{-1}(B)$. Wegen $A \neq |U|$ ist A analytisch dünn in U , da X primär ist. Nach 4.6 ist B analytisch dünn.

Aus einem Satz von G. Scheja [11, Satz 9] folgt, daß sich primäre komplexe Unterräume auch durch algebraische Eigenschaften der Halme ihrer Strukturgarbe charakterisieren lassen.

Definition. Es sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Untergarbe von $\mathcal{F}$. Dann heißt $\mathcal{G}$ primär, wenn gilt:

1. Die analytische Menge $|\mathfrak{U}/\mathfrak{G}| := \{x \in |X| : \mathfrak{U}_x/\mathfrak{G}_x \neq 0\}$ ist irreduzibel.
2. Für jeden Punkt $x \in |\mathfrak{U}/\mathfrak{G}|$ besitzt eine Primärzerlegung von $\mathfrak{G}_x$ in $\mathfrak{U}_x$ (vgl. [21, Vol. I, Ch. IV, App.]) keine eingebetteten Komponenten.

(4.8) Satz. Ein komplexer Raum X ist genau dann primär, wenn die Nullidealgarbe $(0) \subset \mathcal{O}_X$ primär ist.

Beweis. Da $|X|$ in jedem Fall irreduzibel ist, ist X genau dann primär, wenn es zu jedem $x \in |X|$ beliebig kleine offene Umgebungen $U \subset |X|$ gibt, so daß für jede analytische Menge $A \subset U$, $A \neq U$, der Beschränkungshomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U - A)$ injektiv ist. Nach [11, Satz 9] (Äquivalenz von (1) und (4)) ist dies genau dann der Fall, wenn die Garbe $\mathcal{O}_X$, aufgefaßt als $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, "keine eingebetteten Komponenten" besitzt (Bezeichnung von [11]). Dies bedeutet gerade, daß das Nullideal $(0) \subset \mathcal{O}_{X,x}$ in jedem Punkt $x \in |X|$ keine eingebetteten Komponenten der Primärzerlegung besitzt.

Wir wollen nun einen wichtigen Satz von Y.-T. Siu [13, Th. 6] dazu benützen, um für einen beliebigen komplexen Raum eine Darstellung als Vereinigung von primären abgeschlossenen komplexen Unterräumen anzugeben. Die diesen primären Unterräumen zugrundeliegenden analytischen Mengen bilden gerade das Komponentensystem des komplexen Raumes.

Wir bringen zunächst die notwendigen Definitionen. Die folgende Definition der Vereinigung komplexer Unterräume steht in Analogie zu der in der Theorie der Kategorien üblichen Definition [9, S. 31].

Definition. Es sei X ein komplexer Raum, und es seien X_v , $v \in I$, komplexe Unterräume von X mit den kanonischen Immersionen $j_v: X_v \rightarrow X$. Ein komplexer Unterraum X' von X mit der kanonischen Immersion $j': X' \rightarrow X$ heißt Vereinigung der X_v , wenn folgendes gilt:

- (1) X' umfaßt die Unterräume X_v , $v \in I$, d.h., es gibt holomorphe Abbildungen $h_v: X_v \rightarrow X'$ mit $j_v = j' h_v$.
- (2) Ist Y ein weiterer komplexer Raum, $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, Z ein komplexer Unterraum von Y mit der kanonischen Immersion $j: Z \rightarrow Y$ und gibt es holomorphe Abbildungen $f_v: X_v \rightarrow Z$, $v \in I$, mit $f j_v = j f_v$, so gibt es eine holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow Y$ mit $f j' = j f'$.

Die Vereinigung der X_v wird mit $\bigcup_{v \in I} X_v$ bezeichnet.

Die holomorphen Abbildungen h_v in (1) sind nach 3.1, f) Immersionen; also können die X_v als komplexe Unterräume von X' aufgefaßt werden. Die holomorphe Abbildung f' in (2) ist eindeutig bestimmt, da j ein Monomorphismus ist; daraus folgt, daß X' bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(4.9) Mit den Bezeichnungen der obigen Definition gilt: X' ist genau dann Vereinigung der X_v , wenn X' der kleinste komplexe Unterraum von X ist, der die X_v , $v \in I$, umfaßt, d.h.: Ist X'' ein weiterer komplexer Unterraum von X mit der kanonischen Immersion $j'': X'' \rightarrow X$, der die X_v umfaßt, so gibt es eine holomorphe Abbildung $f'': X' \rightarrow X''$ mit $j' = j'' f''$.

Beweis. a) Sei X' Vereinigung der X_v . Setze in (2) der Definition $Y := X$, $f := \text{id}_X$, $Z := X''$.

b) Sei X' der kleinste komplexe Unterraum von X , der die X_v , $v \in I$, umfaßt. Seien $Y, f: X \rightarrow Y$ und Z wie in (2) der Definition. Setze $X'' := X \times_Y Z$; dann folgt die Behauptung.

Aus 4.9 folgt:

(4.10) Es sei X ein komplexer Raum, und es seien X_v , $v \in I$, abgeschlossene komplexe Unterräume von X , definiert durch kohärente Idealgarben $\mathfrak{F}_v \subset \mathcal{O}_X$. Die Idealgarbe $\mathfrak{F} := \bigcap_{v \in I} \mathfrak{F}_v$ sei kohärent, so daß also durch $\mathfrak{F}$ ein abgeschlossener komplexer Unterraum X' von X definiert wird. Dann gilt:

$$X' = \bigcup_{v \in I} X_v.$$

Definition. Sei X ein komplexer Raum. Eine Primärzerlegung von X ist eine Darstellung

$$X = \bigcup_{v \in I} X_v,$$

wobei die X_v , $v \in I$, primäre abgeschlossene komplexe Unterräume von X sind mit $\{|X_v| : v \in I\} = \mathfrak{P}_X$ und $|X_v| \neq |X_\mu|$ für $v \neq \mu$. Die komplexen Räume X_v heißen Primärkomponenten von X .

(4.11) Satz (Siu). Jeder komplexe Raum X besitzt eine Primärzerlegung.

Dieser Satz folgt durch Anwendung von [13, Th. 6] auf die Nullidealgarbe $(0) \subset \mathcal{O}_X$.

In [13] wird auch folgendes bewiesen:

(4.12) a) Eine Primärzerlegung ist unverkürzbar, d.h., ist $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ eine Primärzerlegung und $\mu \in I$, so gilt $X \neq \bigcup_{v \in I - \{\mu\}} X_v$.

b) Die Primärkomponenten eines komplexen Raumes sind i.a. nicht eindeutig bestimmt. Ist aber $L \subset \mathbb{M}_X$ ein isoliertes Teilsystem (d.h.: Aus $A', A'' \in \mathbb{M}_X$, $A' \subset A''$, $A' \in L$ folgt $A'' \in L$), so ist $\bigcup_{v \in I} X_v$ eindeutig bestimmt. Ist insbesondere $|X_v| \in L$ ein maximales Element von $\mathbb{M}_X$ bzgl. Inklusion, so ist X_v als komplexer Unterraum von X eindeutig bestimmt.

Definition. Ein komplexer Raum X heißt **irreduzibel**, wenn gilt: Sind X', X'' abgeschlossene komplexe Unterräume von X mit $X = X' \cup X''$, so folgt $X = X'$ oder $X = X''$. Andernfalls heißt X **reduzibel**.

(4.13) Ein irreduzibler komplexer Raum ist primär.

Beweis. Sei X ein irreduzibler komplexer Raum, und sei $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ eine Primärzerlegung von X . Nehmen wir an, X sei nicht primär. Dann gilt $X \neq X_v$ für jedes $v \in I$. Sei $x \in |X|$. Da die Menge $\{|X_v| : v \in I\} = \mathbb{M}_X$ lokal-endlich ist, kann man eine Umgebung U von x bzgl. $|X|$ wählen, derart, daß $K := \{v \in I : |X_v| \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist. Aus der Irredu-

zibilität von X folgt: $X = \bigcup_{v \in I-K} X_v$, im Widerspruch zu
 $x \notin |X_v|$, $v \in I - K$.

(4.14) Beispiel eines primären, aber reduziblen komplexen Raumes: Sei X der "fünffache Punkt", also der durch das Ideal $\mathfrak{F} := (z^5) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ definierte abgeschlossene komplexe Unterraum von $\mathbb{C}$. Es ist klar, daß X primär ist. Sei $X' \subset X$ definiert durch $\mathfrak{F}' := (z^2)/(z^5)$ und $X'' \subset X$ durch $\mathfrak{F}'' := (z^3)/(z^5)$. Dann ist $X' \neq X$ und $X'' \neq X$, aber wegen $\mathfrak{F}' \cap \mathfrak{F}'' = (0)$ gilt $X' \cup X'' = X$.

§ 5. Eingebettete Korrespondenzen

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in Kom. Ein Repräsentant (T, u, v) von f heißt e i n g e b e t t e t e r R e p r ä s e n t a n t, wenn T ein komplexer Unterraum von $X \times Y$ ist und wenn u und v die durch die Projektionen bestimmten holomorphen Abbildungen sind, d.h. $u = \text{pr}_X j$, $v = \text{pr}_Y j$, wobei $j: T \rightarrow X \times Y$ die kanonische Immersion ist und $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$, $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionsabbildungen sind. f heißt e i n g e b e t t e t e K o r r e s p o n d e n z, wenn f einen eingebetteten Repräsentanten besitzt.

Bemerkung. Eine holomorphe Abbildung ist stets eine eingebettete holomorphe Korrespondenz, d.h. ausführlicher: Sind X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist $[(X, \text{id}_X, f)]: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz. Denn $(\text{id}_X, f): X \rightarrow X \times Y$ ist wegen $\text{pr}_X(\text{id}_X, f) = \text{id}_X$ nach 3.1, f) eine Immersion.

(5.1) Der eingebettete Repräsentant einer eingebetteten Korrespondenz ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien (T_v, u_v, v_v) , $v = 1, 2$, eingebettete Repräsentanten von $f: X \rightarrow Y$, und sei (F, p_1, p_2) das Faserprodukt von $(u_1, v_1): T_1 \rightarrow X \times Y$ und $(u_2, v_2): T_2 \rightarrow X \times Y$. Die p_v sind dann nach 3.1, g) Immersionen; sie sind ferner universelle Epimorphismen und somit Surjektionen; nach 3.1, c) sind sie biholomorph. Daraus folgt: $T_1 = T_2$. Denn setzt man der

einfacheren Bezeichnungen wegen voraus, daß die T_v abgeschlossene komplexe Unterräume von $X \times Y$ sind, definiert durch kohärente Idealgarben $\mathcal{I}_v \subset \mathcal{O}_{X \times Y}$, so ist F (bis auf kanonische Isomorphie) der durch die Idealgarbe $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ definierte abgeschlossene komplexe Unterraum von $X \times Y$; die Garbenhomomorphismen $\ast p_v$ sind die kanonischen Abbildungen $\mathcal{O}_{X \times Y} / \mathcal{I}_v \rightarrow \mathcal{O}_{X \times Y} / \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$. Aus der Isomorphie der $\ast p_v$ folgt daher $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$.

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Korrespondenz, und sei (T, u, v) ein Repräsentant von f , derart, daß $u: T \rightarrow X$ eigentlich ist. Nach N. Bourbaki [2, I.10.1, Cor. 3 zu Prop. 8] ist dann auch $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ eigentlich. Nach 3.6 ist daher das Bild $T^* := (u, v)(T) \subset X \times Y$ definiert, und die Abbildung $t := (u, v)|_T: T \rightarrow (u, v)(T)$ ist eine eigentliche Surjektion. Bezeichnet man mit $j: T^* \rightarrow X \times Y$ die kanonische Immersion und mit $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$, $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen und setzt man $u^* := \text{pr}_X j$, $v^* := \text{pr}_Y j$, so kann man definieren:

Definition. Die Korrespondenz

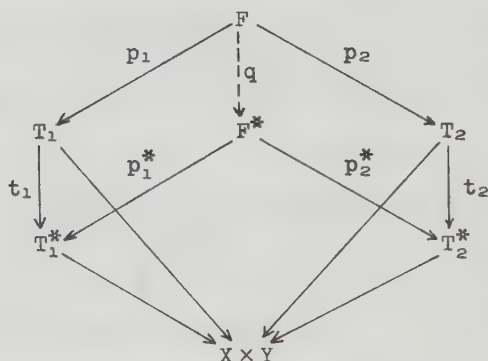
$$f^* := [(T^*, u^*, v^*)]: X \rightarrow Y$$

heißt die zu f zugehörige eingebettete Korrespondenz.

Beweis der Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl des Repräsentanten:

Seien (T_v, u_v, v_v) , $v = 1, 2$, Repräsentanten von f , derart, daß die Abbildungen $u_v: T_v \rightarrow X$ eigentlich sind. Für

$v = 1, 2$ sei $T_v^* := (u_v, v_v)(T_v)$ und $t_v := (u_v, v_v)|T_v \rightarrow T_v^*$; ferner seien (F, p_1, p_2) und (F^*, p_1^*, p_2^*) die Faserprodukte von T_1 und T_2 bzw. von T_1^* und T_2^* über $X \times Y$. Man hat dann das folgende kommutative Diagramm:



Es gibt eine (eindeutig bestimmte) holomorphe Abbildung $q: F \rightarrow F^*$ mit $p_v^* q = t_v p_v$ ($v = 1, 2$). Da die Abbildungen t_v und p_v Surjektionen sind, sind nach 3.1 auch p_v^* Surjektionen. Wie im Beweis von 5.1 folgt hieraus: $T_1^* = T_2^*$.

Aus N. Bourbaki [2, I.10.1, Prop. 5 b)] folgt:

(5.2) Ist $f: X \dashrightarrow Y$ eine holomorphe Korrespondenz, so ist die zugehörige eingebettete Korrespondenz f^* holomorph. Ist (T^*, u^*, v^*) der eingebettete Repräsentant von f^* , so ist u^* eigentlich.

Ferner ergibt sich: Ist (T^*, u^*, v^*) der eingebettete Repräsentant einer eingebetteten holomorphen Korrespondenz $f: X \dashrightarrow Y$, so ist T^* ein abgeschlossener komplexer Unterraum

von $X \times Y$. Denn mit u^* ist auch $(u^*, v^*): T^* \rightarrow X \times Y$ eigentlich. Da eine eigentliche Abbildung abgeschlossen ist, folgt, daß $|T^*| = |(u^*, v^*)|(|T^*|)$ abgeschlossen in $|X \times Y|$ ist. Man kann jedoch nicht umgekehrt daraus, daß T^* ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist, darauf schließen, daß f holomorph ist. Man definiert vielmehr:

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T, u, v) . Dann heißt f schwach-holomorph, wenn T ein abgeschlossener komplexer Unterraum von $X \times Y$ ist.

Die folgende Aussage gibt einen Überblick über die Repräsentanten einer eingebetteten Korrespondenz.

(5.3) Es sei (T^*, u^*, v^*) eingebetteter Repräsentant einer Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$. Dann ist (T, u, v) genau dann ein Repräsentant von f , wenn es einen universellen Epimorphismus $t: T \rightarrow T^*$ gibt mit $(u, v) = (u^*, v^*)t$.

Beweis. Gibt es einen universellen Epimorphismus $t: T \rightarrow T^*$ mit $(u, v) = (u^*, v^*)t$, so folgt nach 1.6,a): $(T, u, v) \sim (T^*, u^*, v^*)$.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß (T, u, v) Repräsentant von f ist, und sei (F, p, p^*) das Faserprodukt von $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ und $(u^*, v^*): T^* \rightarrow X \times Y$. Dann sind p und p^* universelle Epimorphismen. Ferner ist (u^*, v^*) und daher auch p eine Immersion (3.1,g)); nach 3.2 und 3.1,c) ist p

biholomorph. $t := p^*p^{-1}: T \rightarrow T^*$ ist der gewünschte universelle Epimorphismus.

(5.4) Beispiel einer holomorphen Korrespondenz, die nicht eingebettet ist.

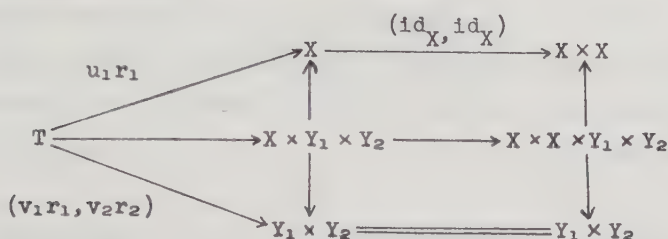
Es seien N und $\pi: \mathbb{C} \rightarrow N$ wie in Beispiel 3.3 definiert; es sei ferner E der reduzierte einpunktige komplexe Raum, und es seien $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow E$ und $\tau: N \rightarrow E$ die konstanten Abbildungen. Sei $f := [(\mathbb{C}, \pi, \sigma)]: N \dashrightarrow E$. Offensichtlich ist $(\pi, \sigma)(\mathbb{C}) \cong N$; da π nach 3.3 kein universeller Epimorphismus ist, ist daher f von der zugehörigen eingebetteten Korrespondenz $f^* = [(N, \text{id}_N, \tau)]: N \dashrightarrow E$ verschieden.

(5.5) Verbindung und Produkt eingebetteter Korrespondenzen sind wieder eingebettet.

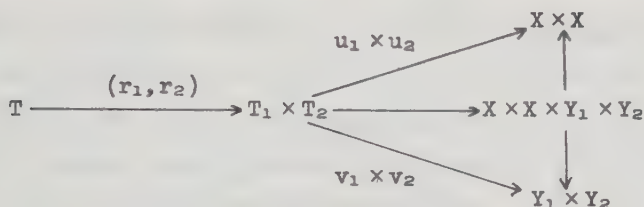
Beweis. Die Aussage bzgl. des Produktes folgt unmittelbar aus 1.17. Zum Beweis der anderen Aussage gebe man sich eingebettete Korrespondenzen $f_v: X \rightarrow Y_v$, $v = 1, 2$, mit den eingebetteten Repräsentanten (T_v, u_v, v_v) vor. Sei (T, r_1, r_2) das Faserprodukt von $u_1: T_1 \rightarrow X$ und $u_2: T_2 \rightarrow X$. Dann ist $(f_1, f_2) = [(T, u_1 r_1, (v_1 r_1, v_2 r_2))]$; es ist zu zeigen, daß $(u_1 r_1, (v_1 r_1, v_2 r_2))$ eine Immersion ist. Die holomorphen Abbildungen $(r_1, r_2): T \rightarrow T_1 \times T_2$ und $(u_1 \times u_2, v_1 \times v_2): T_1 \times T_2 \rightarrow X \times X \times Y_1 \times Y_2$ sind Immersionen; die Behauptung folgt daher aus 3.1, wenn folgendes gezeigt ist:

$$\begin{aligned} & ((\text{id}_X, \text{id}_X) \times \text{id}_{Y_1} \times \text{id}_{Y_2})(u_1 r_1, (v_1 r_1, v_2 r_2)) = \\ & (u_1 \times u_2, v_1 \times v_2)(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird durch das folgende Diagramm dargestellt:



Die rechte Seite der Gleichung wird durch das Diagramm



illustriert. Beachtet man, daß $(v_1 r_1, v_2 r_2) = (v_1 \times v_2)(r_1, r_2)$ und wegen $u_1 r_1 = u_2 r_2$ auch $(id_X, id_X)u_1 r_1 = (u_1 \times u_2)(r_1, r_2)$ gilt, so erhält man die Behauptung.

Definition. Es seien X, Y, Z komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ holomorphe Korrespondenzen. Die zu g zugehörige eingebettete Korrespondenz heißt eingebettete Komposition von f und g und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

Sind f und g eingebettete Korrespondenzen, so kann trotzdem $g \circ f \neq g \circ f$ gelten. Ist z.B. $h: X \rightarrow Y$ eine nicht-eingebettete Korrespondenz, (T, u, v) ein Repräsentant von h und setzt man $f := [(T, u, id_T)]$, $g := [(T, id_T, v)]$, so gilt

$h = g \circ f$, und f und g sind eingebettet, ohne daß h es ist.

Ist dagegen f eine Immersion, so gilt $g \circ f = g * f$; die Einschränkung einer eingebetteten holomorphen Korrespondenz auf einen komplexen Unterraum ist somit wieder eine eingebettete holomorphe Korrespondenz.

Die eingebettete Komposition ist i.a. nicht assoziativ, wie das folgende Beispiel beweist:

(5.6) Beispiel. Es sei $\mathbb{C}$ die komplexe Ebene mit der üblichen Struktur, $N := (\mathbb{C}, \mathbb{C}\{z^2, z^3\})$ die Neilsche Parabel, $\pi: \mathbb{C} \rightarrow N$ die Normalisierungsabbildung, $A \subset N$ der durch das Ideal $(z^2)\mathbb{C}\{z^2, z^3\}$ definierte abgeschlossene komplexe Unterraum und $B := \pi^{-1}(A)$, also der durch das Ideal $(z^2)\mathbb{C}\{z\}$ definierte abgeschlossene komplexe Unterraum von $\mathbb{C}$. In Beispiel 3.3 wurde gezeigt, daß $\rho := \pi|_B \rightarrow A$ keine Surjektion ist. Es seien ferner $i: A \rightarrow N$ und $j: B \rightarrow \mathbb{C}$ die kanonischen Immersionen. Wir setzen

$$f := [(A, i, i)]: N \longrightarrow N,$$

$$g := [(\mathbb{C}, \pi, \text{id}_{\mathbb{C}})]: N \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$h := [(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}}, \pi)]: \mathbb{C} \longrightarrow N.$$

Wegen $h * (g \circ f) = (h * (g \circ f))^* = ((h \circ g) \circ f)^* = (h \circ g) * f$ genügt es zu zeigen: (i) $h * (g * f) = h * (g \circ f)$, aber (ii) $(h * g) * f \neq (h \circ g) * f$.

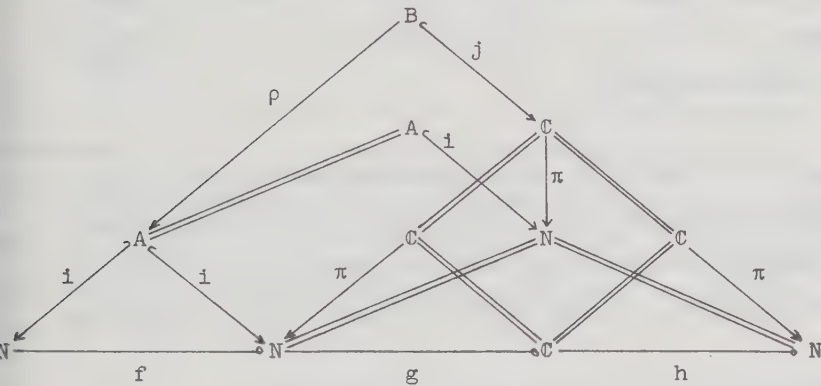
Zum Beweis von (i) braucht man nur zu beachten, daß $g \circ f = [(B, i \circ j)]$ bereits eine eingebettete Korrespondenz ist, also $g \circ f = g * f$ gilt.

Beweis von (ii) : Es ist $hg = [(C, \pi, \pi)]$ und $h * g = [(N, id_N, id_N)]$; daraus folgt:

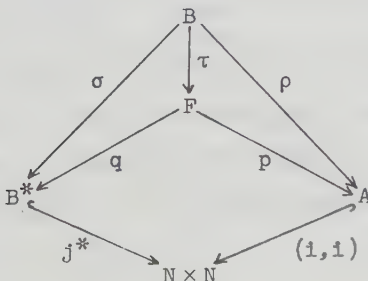
$$(h * g) * f = (h * g)f = [(A, i, i)] ,$$

$$(hg)f = [(B, i\rho, \pi j)] ,$$

wie man an dem folgenden Diagramm sieht:



Sei $B^* := (i\rho, \pi j)(B) \subset N \times N$ und $j^*: B^* \rightarrow N \times N$ die kanonische Immersion. Sei (F, p, q) das Faserprodukt von $(i, i): A \rightarrow N \times N$ und $j^*: B^* \rightarrow N \times N$. Sei $\sigma := (i\rho, \pi j)|_B: B \rightarrow B^*$. Wegen $j^* \sigma = (i, i)\rho$ existiert eine holomorphe Abbildung $\tau: B \rightarrow F$ mit $p\tau = \rho$ und $q\tau = \sigma$; man hat also das kommutative Diagramm



Die Abbildung q ist eine Immersion, da (i, i) eine Immersion ist, und eine Surjektion, da σ eine Surjektion ist (3.6); daher ist q biholomorph. Es folgt nun, daß $p: F \rightarrow A$ keine Surjektion ist, denn sonst wäre wegen $p = pq^{-1}\sigma$ auch p eine Surjektion; dies ist aber, wie weiter oben bemerkt wurde, nicht der Fall. Insbesondere ist also p kein universeller Epimorphismus; daraus folgt: $[(A, i, i)] \neq [(B^*, pr_{1j}^*, pr_{2j}^*)]$ (dabei bezeichnet $pr_v: N \times N \rightarrow N$ die Projektion auf den v -ten Faktor), also $(h * g) * f \neq (hg) * f$.

Nach 5.1 und 5.3 ist eine eingebettete Korrespondenz im wesentlichen bereits durch ihren eingebetteten Repräsentanten bestimmt. Daher lassen sich manche von komplexen Räumen her bekannte Begriffe auf eingebettete Korrespondenzen übertragen.

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T, u, v) .

a) Ist $f': X \rightarrow Y$ eine weitere eingebettete Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T', u', v') , so heißt f in f' analytisch enthalten, wenn T ein komplexer Unterraum von T' ist; wir schreiben $f \subset f'$.

b) f heißt primär, wenn T primär ist.

c) Sei f schwach-holomorph, und sei $T = \bigcup_{v \in I} T_v$ mit abgeschlossenen komplexen Unterräumen T_v von T . Für $v \in I$ sei $u_v := u|_{T_v} \rightarrow X$, $v_v := v|_{T_v} \rightarrow Y$. Dann heißt f Vereinigung der Korrespondenzen $f_v := [(T_v, u_v, v_v)]: X \rightarrow Y$; wir schreiben $f = \bigcup_{v \in I} f_v$.

d) Ist speziell $T = \bigcup_{v \in I} T_v$ eine Primärzerlegung, so heißen die Korrespondenzen f_v Primärkomponenten von f und $f = \bigcup_{v \in I} f_v$ eine Primärzerlegung von f .

Wir benützen ferner den folgenden Begriff:

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T, u, v) . Ist $A \in \mathfrak{M}_T$ eine analytische Menge des Komponentensystems von T , so bezeichnen wir mit $u_A: A \rightarrow |X|$ und $v_A: A \rightarrow |Y|$ die durch die Projektion von $|X| \times |Y|$ auf $|X|$ bzw. $|Y|$ induzierten stetigen Abbildungen und definieren $f_A := [(A, u_A, v_A)]: |X| \rightarrow |Y|$. Die Menge

$$\mathfrak{M}_f := \{f_A : A \in \mathfrak{M}_T\}$$

heißt Komponentensystem von f .

Offensichtlich ist f genau dann primär, wenn $\mathfrak{M}_f = \{|f|\}$ gilt.

(5.7) Identitätssatz für eingebettete Korrespondenzen.

Es seien X, Y komplexe Räume und $f, f': X \rightarrow Y$ eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenzen. Es existiere ein offener komplexer Unterraum U von X mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $g \in \mathfrak{M}_f$ gilt $g|_U \neq \emptyset$.

(11) $f|_U \subset f'|_U$.

Dann folgt: $f \subset f'$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}' \subset \mathcal{O}_{X \times Y}$ die kohärenten Idealgarben, welche die eingebetteten Repräsentanten von f bzw. f' als abgeschlossene komplexe Unterräume von $X \times Y$ definieren. Wegen (ii) gilt für jeden Punkt $(x, y) \in |U| \times |Y|$: $\mathfrak{F}_{(x, y)} \supset \mathfrak{F}'_{(x, y)}$; wegen (i) folgt die Behauptung aus 4.5.

(5.8) Corollar. Es seien X, Y komplexe Räume, $f, f' : X \rightarrow Y$ eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenzen und U ein offener komplexer Unterraum von X mit $|f| \cap |U| \neq \emptyset$ und $f|_U \subset f'|_U$. Ferner sei f primär. Dann gilt $f \subset f'$.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz in Kom. Am Ende von § 3 wurde die Menge $\Sigma(f)$ der Punkte $x \in |X|$ definiert, in denen f keine holomorphe Abbildung ist (S. 44). Wir werden zeigen: Ist f eine eingebettete holomorphe Korrespondenz, so ist $\Sigma(f)$ eine analytische Menge in X .

Definition. Seien X, Y komplexe Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und $y \in |Y|$. Dann heißt f in Punkt y umkehrbar, wenn es eine offene Umgebung V von y bzgl. Y gibt (d.h.: V ist offener komplexer Unterraum von Y , und $|V|$ ist Umgebung von y), derart, daß $f|f^{-1}(V) \rightarrow V$ biholomorph ist. Wir verwenden die Bezeichnung

$$S(f) := \{ y \in |Y| : f \text{ ist nicht umkehrbar in } y \}.$$

(5.9) Hilfssatz. Es seien X, Y, Z komplexe Räume, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ holomorphe Abbildungen und $h := gf$.

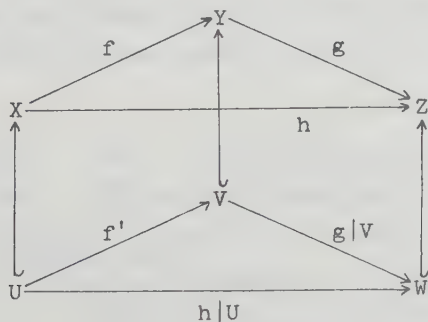
Dann gilt:

- a) $S(h) \subset S(g) \cup |g|(S(f))$.
 b) Ist f eine Surjektion oder g eine Immersion, so gilt $S(h) = S(g) \cup |g|(S(f))$.

Beweis. a) Sei $z \in |Z| - (S(g) \cup |g|(S(f)))$. Dann ist g umkehrbar in z und f umkehrbar in dem durch $|g|(y) = z$ eindeutig bestimmten Punkt y . Daraus folgt $z \notin S(h)$ und somit $S(h) \subset S(g) \cup |g|(S(f))$.

b) Sei $z \in |Z| - S(h)$. Dann gibt es genau ein $x \in |X|$ mit $|h|(x) = z$. Ferner gibt es genau ein $y \in |Y|$ mit $|g|(y) = z$. Dies ist klar, falls g Immersion ist, da dann $|g|$ injektiv ist. Wird vorausgesetzt, daß f Surjektion ist, und nimmt man an, es gebe Punkte $y_1, y_2 \in |Y|$ mit $|g|(y_1) = |g|(y_2) = z$, so kann man, da $|f|$ surjektiv ist, Punkte $x_1, x_2 \in |X|$ wählen mit $|f|(x_v) = y_v$ ($v = 1, 2$); dann folgt aber $|h|(x_v) = z$, $v = 1, 2$, hieraus $x_1 = x_2$ und somit $y_1 = y_2$.

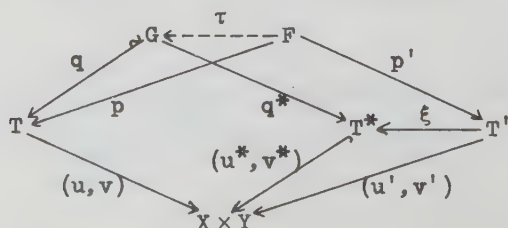
Sei W eine Umgebung von z bzgl. Z , so daß mit $U := h^{-1}(W)$ gilt: $h|_U \rightarrow W$ ist biholomorph. Sei $V := g^{-1}(W)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $f': U \rightarrow V$, so daß das Diagramm



kommutiert. Nach 3.1 ist f' eine Immersion und $g|V \rightarrow W$ eine Surjektion. Ist g eine Immersion, so ist $g|V \rightarrow W$ nach 3.1, g) auch Immersion und somit biholomorph; dann ist auch f' biholomorph. Wird f als Surjektion vorausgesetzt, so ist nach 3.4 auch f' eine Surjektion, da nach 1.1 $U = \bar{f}^1(V)$ gilt; also ist dann f' und somit auch $g|V \rightarrow W$ biholomorph. In beiden Fällen folgt: $z \notin S(g)$, $y \notin S(f)$, also $z \notin S(g) \cup |g|(S(f))$.

(5.10) Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Korrespondenz. Ferner sei (T^*, u^*, v^*) der eingebettete Repräsentant der zu f zugehörigen eingebetteten Korrespondenz f^* . Dann gilt: $S(u^*) \subset \Sigma(f)$; insbesondere also $\Sigma(f^*) \subset \Sigma(f)$.

Beweis. Sei $x \in |X| - \Sigma(f)$. Dann gibt es einen Repräsentanten (T, u, v) von f , derart, daß die holomorphe Abbildung $u: T \rightarrow X$ im Punkt x umkehrbar ist. Es ist zu zeigen, daß u^* in x umkehrbar ist. Sei (T', u', v') ein Repräsentant von f , derart, daß $u': T' \rightarrow X$ eigentlich ist. Dann hat man eine Surjektion $\xi: T' \rightarrow T^*$ mit $(u^*, v^*)\xi = (u', v')$. Sei (F, p, p') das Faserprodukt von $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ und $(u', v'): T' \rightarrow X \times Y$, und sei (G, q, q^*) das Faserprodukt von $(u, v): T \rightarrow X \times Y$ und $(u^*, v^*): T^* \rightarrow X \times Y$. Dann hat man das folgende kommutative Diagramm:



Es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\tau: F \rightarrow G$ mit $q\tau = p$ und $q^*\tau = \xi p'$. Die Abbildungen p und p' sind universelle Epimorphismen, insbesondere Surjektionen. Wegen $q\tau = p$ ist q eine Surjektion. Da (u^*, v^*) eine Immersion ist, ist q auch eine Immersion; also ist q biholomorph. Aus $q^*\tau = \xi p'$ folgt, da p' und ξ Surjektionen sind, daß q^* eine Surjektion ist. Wegen $u = u^*q^*q^{-1}$ gilt nach 5.9 : $S(u^*) \subset S(u)$. Aus $x \notin S(u)$ folgt demnach $x \notin S(u^*)$.

(5.11) Corollar. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T^*, u^*, v^*) . Dann gilt $\Sigma(f) = S(u^*)$.

(5.12) Satz. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann ist $S(f)$ eine analytische Menge in Y .

Aus 5.12 folgt wegen 5.11 :

(5.13) Corollar. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz. Dann ist $\Sigma(f)$ eine analytische Menge in X .

Der Beweis von Satz 5.12 erfordert einige Vorbereitungen. Im folgenden seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung.

Definition. f heißt lokale Immersion im Punkt $x \in |X|$, wenn es eine offene Umgebung U von x bzgl. X gibt, derart, daß $f|U \rightarrow Y$ eine Immersion ist.

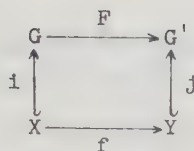
f heißt lokal-biholomorph im Punkt $x \in |X|$, wenn es offene Umgebungen U von x bzgl. X und V von y bzgl. Y mit $f(U) = V$ gibt, so daß $f|U \rightarrow V$ biholomorph ist.

(5.14) Hilfssatz. f ist genau dann lokale Immersion (bzw. lokal-biholomorph) in $x \in |X|$, wenn $*^f_x: \mathcal{O}_Y, |f|(x) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv (bzw. bijektiv) ist.

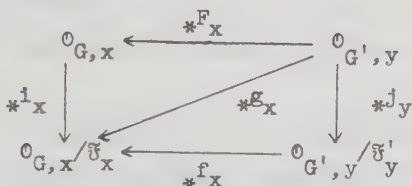
Zum Beweis vgl. [7, Exp. 13, Cor. 1.7]; einen Beweis der nicht eingeklammerten Aussage erhält man auch durch einfache Verallgemeinerung der Aussage (II) von K. Stein in [15, S. 832].

(5.15) Hilfssatz. $M(f) := \{x \in |X|: f \text{ ist nicht lokale Immersion in } x\}$ ist eine analytische Menge in X .

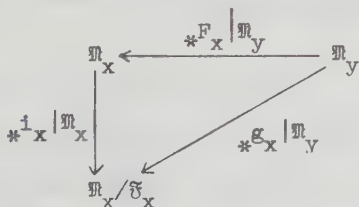
Beweis (vgl. [15, Beweis von Aussage (I), S. 832 ff]). Da die Aussage von lokaler Natur ist, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß X und Y abgeschlossene komplexe Unterräume von Gebieten $G \subset \mathbb{C}^n$ bzw. $G' \subset \mathbb{C}^m$ sind, definiert durch kohärente Idealgarben $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_G$ bzw. $\mathcal{F}' \subset \mathcal{O}_{G'}$. Ferner kann man ohne Einschränkung annehmen, daß f durch eine holomorphe Abbildung $F = (F_1, \dots, F_m): G \rightarrow G'$ erzeugt wird [5, § 1, Satz 2], d.h., man hat ein kommutatives Diagramm



wobei $i: X \rightarrow G$ und $j: Y \rightarrow G'$ die kanonischen Immersionen sind. Sei $g := F \circ i: X \rightarrow G'$. Für $x \in |X|$ und $y := |f|(x)$ kommutiert dann das Diagramm



Also ist $*f_x$ genau dann surjektiv (und damit f lokale Immersion in x), wenn $*g_x$ surjektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die eingeschränkte Abbildung $*g_x|_{\mathfrak{M}_y} \rightarrow \mathfrak{M}_x/\mathfrak{U}_x$ surjektiv ist, wobei mit $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_x$ die maximalen Ideale von $\mathcal{O}_{G',y}$ bzw. $\mathcal{O}_{G,x}$ bezeichnet werden. Aus der Kommutativität des Diagrammes



folgt, daß $*g_x|_{\mathfrak{M}_y} \rightarrow \mathfrak{M}_x/\mathfrak{U}_x$ genau dann surjektiv ist, wenn gilt:

$$(*) \quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{U}_x + *F_x(\mathfrak{M}_y).$$

Man wähle eine Umgebung $U \subset G$ von x und holomorphe Funktionen $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{O}_G(U)$, welche die Idealgarbe $\mathfrak{U}$ über

U erzeugen. Wie in [15, Beweis von Aussage (I), S. 833 f.] zeigt man, daß die Punkte $x \in |X| \cap U$, in denen die Gleichung (*) nicht gilt, dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen der Rang der Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu}, \frac{\partial H_\kappa}{\partial x_\nu} \right)(x)$$

($\mu = 1, \dots, m$, $\kappa = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, n$) kleiner als n ist, und daß somit diese Punkte eine analytische Menge bilden.

(5.16) Sei $N(f) := \{x \in |X| : |\bar{f}|(|f|(x)) \neq \{x\}\}$.

Ist f eigentlich, so ist $\overline{N(f)}$ eine analytische Menge in X .

Beweis. Diese Aussage folgt durch Übergang zu den Reduktionen von X und Y aus Aussage (III) von K. Stein in [15, S. 834].

(5.17) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Surjektion. Dann ist $S(f)$ eine analytische Menge in Y .

Beweis. Die Mengen $M(f)$ und $\overline{N(f)}$ (vgl. 5.15 und 5.16) sind analytisch in X ; da $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ eigentlich ist, ist daher auch $R := |f|(M(f) \cup \overline{N(f)})$ eine analytische Menge in X . Es gilt $R \subset S(f)$; denn ist $y \in |Y| - S(f)$, so gibt es eine offene Umgebung V von y bzgl. Y , so daß $f|_{\bar{f}^{-1}(V)}: \bar{f}^{-1}(V) \rightarrow V$ biholomorph ist; dann gilt $|\bar{f}^{-1}(V)| \cap (M(f) \cup N(f)) = \emptyset$, also $y \notin R$.

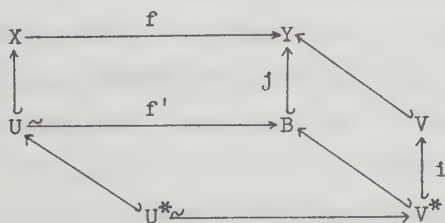
Wir zeigen nun: $S(f) \subset R$. Sei $y_0 \in |Y| - R$. Dann gibt es genau ein $x_0 \in |X|$ mit $|f|(x_0) = y_0$, und f ist lokale

Immersion in x_0 . Es gibt eine offene Umgebung U von x_0 bzgl. X , einen komplexen Unterraum B von Y mit der kanonischen Immersion $j: B \rightarrow Y$ und eine biholomorphe Abbildung $f': U \rightarrow B$ mit $f|U = j f'$. Die Menge $|B|$ muß Umgebung von y_0 sein. Denn sonst gäbe es eine Folge von Punkten $y_v \in |Y| - |B|$, $v = 1, 2, \dots$, die gegen y_0 konvergierte; da die Menge

$$|f^{-1}|(y_0) \cup \bigcup_{v=1}^{\infty} |f^{-1}|(y_v)$$

offensichtlich kompakt ist, könnte man dann in $\bigcup_{v=1}^{\infty} |f^{-1}|(y_v)$ eine Punktfolge (x_μ) wählen, die gegen einen Punkt von $|f^{-1}|(y_0)$ konvergierte; wegen $|f^{-1}|(y_0) = \{x_0\}$ würden aber fast alle der x_μ in $|U|$, also unendlich viele der y_v in $|B|$ liegen, im Widerspruch zur Wahl der y_v .

Es gibt also eine offene Umgebung V von y bzgl. Y mit $|V| \subset |B|$. Es sei V ferner so klein gewählt, daß $|V| \cap |f|(R) = \emptyset$ gilt. Sei $V^* := B \cap V$ und $U^* := f^{-1}(V^*)$. Dann hat man das folgende kommutative Diagramm:



Es genügt nun offensichtlich zu zeigen, daß die kanonische Immersion $i: V^* \rightarrow V$ biholomorph ist, d.h. $V = V^*$. Wegen $|V| \subset |B|$ gilt $|V^*| = |V| \cap |B| = |V|$. Sei $y \in V^*$ beliebig. Wegen $|V| \cap |f|(R) = \emptyset$ gibt es genau ein $x \in |X|$ mit

$|f|(x) = y$; es gilt also $(|f|_*^{\mathcal{O}_X})_y = \mathcal{O}_{X,x}$. Aus dem obigen Diagramm ergibt sich nun das folgende kommutative Diagramm der Halme:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{X,x} & \xleftarrow{*\overset{f}{f}_y} & \mathcal{O}_{Y,y} & & \\
 \parallel & & \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{O}_{U,x} & \xleftarrow{*\overset{f'}{f}_y} & \mathcal{O}_{B,y} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V,y} \\
 & & & \searrow & \downarrow \scriptstyle *\overset{1}{f}_y \\
 & & & & \mathcal{O}_{V^*,y}
 \end{array}$$

Aus der Injektivität von $*^f_y$ ergibt sich daher die von $*^1_y$. Da i Immersion und somit $*^1_y$ surjektiv ist, muß $*^1_y$ bijektiv sein. Daraus folgt: i ist biholomorph.

(5.18) Sei Y' ein abgeschlossener komplexer Unterraum eines komplexen Raumes Y , und sei $j: Y' \rightarrow Y$ die kanonische Immersion. Dann ist $S(j)$ eine analytische Menge in Y .

Beweis. Y' sei als abgeschlossener komplexer Unterraum von Y durch die kohärente Idealgarbe $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_Y$ definiert. Da $|j|$ injektiv ist, ist j genau dann in einem Punkt $y \in |Y|$ umkehrbar, wenn j in y lokal-biholomorph ist. Nach 5.14 ist dies genau dann der Fall, wenn der Homomorphismus $*^j_y: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{F}_y$ bijektiv ist, d.h. $\mathfrak{F}_y = (0)$. Da $\mathfrak{F}$ eine kohärente Idealgarbe ist, ist die Menge $\{y \in |Y|: \mathfrak{F}_y \neq (0)\}$, der Träger von $\mathfrak{F}$, eine analytische Menge in Y .

Beweis von Satz 5.12 . Sei $Y' := f(X)$, $j: Y' \rightarrow Y$ die kanonische Immersion und $f' := f|_{X \rightarrow Y'}$. Nach 5.9, b) gilt $S(f) = S(f') \cup S(j)$; die Behauptung folgt daher aus 5.17 und 5.18 .

§ 6. Eigentliche Modifikationsabbildungen

Definition. Es seien X und Y komplexe Räume. Eine eigentliche holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eigentliche Modifikationsabbildung, wenn es offene Unterräume $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $|f|(|U|) = |V|$ gibt, so daß gilt:

1. $|U| \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$.
2. $|V| \cap B \neq \emptyset$ für jedes $B \in \mathfrak{M}_Y$.
3. Die Beschränkung $f|U \rightarrow V$ ist biholomorph.

(6.1) Satz. Eine eigentliche holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann eine eigentliche Modifikationsabbildung, wenn die analytischen Mengen $S(f)$ und $|\bar{f}^{-1}|(S(f))$ analytisch dünn in Y bzw. X sind.

Beweis. a) Sei f eigentliche Modifikationsabbildung, und seien U und V wie in der obigen Definition. Dann gilt $S(f) \subset |Y| - |V|$ und $|\bar{f}^{-1}|(S(f)) \subset |X| - |U|$. Wegen $|V| \cap B \neq \emptyset$ für jedes $B \in \mathfrak{M}_Y$ gilt daher $B \not\subset S(f)$ für jedes $B \in \mathfrak{M}_Y$; entsprechend gilt $A \not\subset |\bar{f}^{-1}|(S(f))$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$. Nach Lemma 4.2 sind $S(f)$ und $|\bar{f}^{-1}|(S(f))$ analytisch dünn in Y bzw. X .

b) $S(f)$ und $|\bar{f}^{-1}|(S(f))$ seien analytisch dünn in Y bzw. X . Nach Lemma 4.2 gilt dann für $V := Y - S(f)$ und $U := X - |\bar{f}^{-1}|(S(f))$: $|U| \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$, $|V| \cap B \neq \emptyset$ für jedes $B \in \mathfrak{M}_Y$. Da f in jedem Punkt $y \in |Y|$ umkehrbar ist, ist $f|U \rightarrow V$ biholomorph.

(6.2) Corollar. Eine eigentliche Modifikationsabbildung ist eine Surjektion.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung. Nach 6.1 ist $S(f)$ analytisch dünn in Y ; daher ist $|Y| - S(f)$ dicht in $|Y|$. Aus $|Y| - S(f) \subset |f|(|X|) \subset |Y|$ folgt, da $|f|$ eigentlich, insbesondere abgeschlossen ist: $|Y| = \overline{|Y| - S(f)} \subset \overline{|f|(|X|)} = |f|(|X|) \subset |Y|$, also $|f|(|X|) = |Y|$. Somit ist $|f|$ surjektiv.

Sei $x \in |X|$ und $y := |f|(x)$; wir zeigen, daß $*^f_x: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv ist. Sei $s \in \mathcal{O}_{Y,y}$ mit $*^f_x(s) = 0$. Man wähle eine Umgebung V von y bzgl. $|Y|$ und ein $r \in \mathcal{O}_Y(V)$ mit $r_y = s$. Sei $t := *^f_V(r) \in \mathcal{O}_X(|f|^{-1}(V))$. Wegen $t_x = *^f_x(s) = 0$ gibt es eine Umgebung U von x bzgl. $|f|^{-1}(V)$ mit $t|_U = 0$. Sei $U' := U - |f|^{-1}(S(f))$ und $V' := V - S(f)$. Dann ist $f|_{(U', \mathcal{O}_X|_{U'})} \rightarrow (V', \mathcal{O}_Y|_{V'})$ biholomorph. Daraus folgt: $f|_{V'} = 0$, also, da $S(f)$ analytisch dünn in Y ist: $r = 0$ und somit $s = 0$. Daher ist $*^f_x$ für jedes $x \in |X|$ injektiv. Es folgt, daß auch $*^f_y: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_* \mathcal{O}_X)_y$ für jedes $y \in |Y|$ injektiv ist, d.h., f ist eine Surjektion.

Eigentliche Modifikationsabbildungen erhalten die Primärzerlegungen, d.h:

(6.3) Satz. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung und $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ eine Primärzerlegung. Für jedes $v \in I$ setze man $Y_v := f(X_v)$. Dann ist auch $Y = \bigcup_{v \in I} Y_v$ eine Primärzerlegung, und die holomorphen Abbildungen $f_v := f|_{X_v} \rightarrow Y_v$ sind eigentliche Modi-

fiktionsabbildungen. Insbesondere gilt $|f|(A) \in \mathfrak{M}_Y$ für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$.

Beweis. Nach 3.6 sind die holomorphen Abbildungen $f_v: X_v \rightarrow Y_v$ Surjektionen; daher folgt aus 4.7, daß die Y_v primär sind. Wir zeigen: $Y = \bigcup_{v \in I} Y_v$. Sei $j: \bigcup_{v \in I} Y_v \rightarrow Y$ die kanonische Immersion. Nach Definition der Vereinigung gibt es eine holomorphe Abbildung $f': \bigcup_{v \in I} X_v \rightarrow \bigcup_{v \in I} Y_v$ mit $j f' = f$. Da f nach 6.2 eine Surjektion ist, folgt hieraus nach 3.1, daß j biholomorph ist, also $Y = \bigcup_{v \in I} Y_v$.

Wir zeigen nun: $\{|Y_v|: v \in I\} = \mathfrak{M}_Y$; daraus folgt dann, daß $Y = \bigcup_{v \in I} Y_v$ eine Primärzerlegung ist. Sei $v \in I$. Dann gibt es ein $A \in \mathfrak{M}_X$ mit $|f|(A) = Y_v$. Ferner gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, derart, daß A irreduzible Komponente von E_X^k ist. Seien U, V offene Unterräume von X bzw. Y mit folgenden Eigenschaften: (i) $f(U) = V$, (ii) $f|_U \rightarrow V$ ist biholomorph, (iii) $|U| \cap A \neq \emptyset$, (iv) $|U| \cap B = \emptyset$ für alle von A verschiedenen irreduziblen Komponenten B von E_X^k . Dann gibt es eine irreduzible Komponente C von E_Y^k mit $|f|(A \cap |U|) = C \cap |V|$. Da $|f|(A)$ irreduzibel ist, folgt aus dem Identitätssatz für irreduzible analytische Mengen: $|f|(A) = C$. Damit ist gezeigt: $\{|Y_v|: v \in I\} \subset \mathfrak{M}_Y$. Ebenso zeigt man: $\{|Y_v|: v \in I\} \supset \mathfrak{M}_Y$.

Wir zeigen nun, daß die Abbildungen $f_v: X_v \rightarrow Y_v$ eigentliche Modifikationsabbildungen sind. Sei $v \in I$. Es gibt ein $y \in |Y_v|$, derart, daß f im Punkt y umkehrbar ist. Dann ist auch f_v in y umkehrbar; daraus folgt $S(f_v) \neq |Y_v|$ und $|\bar{f}_v^{-1}|(S(f_v)) \neq |X_v|$. Da $|f_v|$ eigentlich ist, folgt die Behauptung aus 6.1 und aus der Definition des primären komplexen Raumes.

(6.4) Lemma. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, derart, daß $S(f)$ analytisch dünn in Y ist. Dann gibt es genau einen abgeschlossenen komplexen Unterraum X' von X , so daß die Beschränkung $f' := f|_{X'} \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist.

Beweis: Sei $V := Y - S(f)$ und $U := f^{-1}(V)$. Sei weiter $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ eine Primärzerlegung, $K := \{v \in I: |X_v| \cap |U| \neq \emptyset\}$ und $X' := \bigcup_{v \in K} X_v$. Ist $f' := f|_{X'} \rightarrow Y$, so ist $f'|_{U \rightarrow V}$ biholomorph; daraus folgt, daß f' eine eigentliche Modifikationsabbildung ist.

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, X'' sei ein weiterer abgeschlossener komplexer Unterraum von X , so daß $f'' := f|_{X''} \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist. Dann ist auch f'' in jedem Punkt von $|V|$ umkehrbar. Die Menge $|U|$ ist auch in $|X'|$ und $|X''|$ offen und hat mit allen analytischen Mengen der Komponentensysteme $\mathbb{M}_{X'}$ bzw. $\mathbb{M}_{X''}$ gemeinsame Punkte; ferner gilt $\mathcal{O}_{X'}|_{|U|} = \mathcal{O}_{X''}|_{|U|}$. Aus dem Identitätssatz 4.5 folgt $X' = X''$.

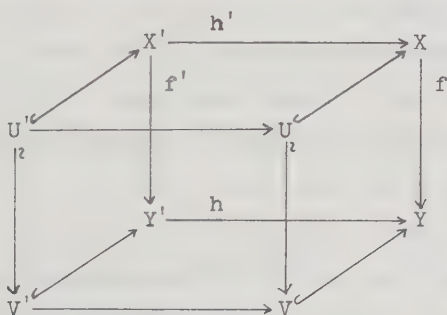
(6.5) Satz. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung, und es sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat. Ferner sei $|h'|^{-1}(S(f))$ analytisch

dünn in Y' . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten abgeschlossenen komplexen Unterraum X'' von X' , so daß $f'' := f'|_{X''} \rightarrow Y'$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist.

Beweis: Wir zeigen: $S(f') \subset |\bar{h}|^{-1}(S(f))$; die Behauptung folgt dann aus 6.4. Wir definieren offene Unterräume $V := Y - S(f)$, $U := \bar{f}^{-1}(V)$, $V' := \bar{h}^{-1}(V)$, $U' := \bar{h}^{-1}(U)$. Wir haben also einen kommutativen Würfel



Nach 1.2 ist die Vorderfläche des Würfels ein kartesisches Quadrat; da $f|U \rightarrow V$ biholomorph ist, ist somit auch $f'|U' \rightarrow V'$ biholomorph. Daher gilt $S(f') \subset |Y'| - |V'|$. Wegen $V' = Y' - |\bar{h}|^{-1}(S(f))$ folgt hieraus die Behauptung.

(6.6) Lemma. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung und A eine analytische Menge in X . Genau dann ist A analytisch dünn in X , wenn $B := |f|(A)$ analytisch dünn in Y ist.

Beweis. a) Sei A analytisch dünn in X . Sei A' die Vereinigung der in $|\bar{f}|^{-1}(S(f))$ liegenden irreduziblen Komponenten von A und A'' die Vereinigung derjenigen irreduziblen

irreduziblen Komponenten von A , welche die offene Menge $U := |X| - |\bar{f}^1|(S(f))$ treffen. Dann ist $|f|(A')$ in $S(f)$ enthalten und daher analytisch dünn in Y . Ferner gilt offensichtlich: $A'' \cap U = |\bar{f}^1|(|f|(A'')) \cap U$; nach dem Identitätssatz für irreduzible analytische Mengen, angewandt auf die irreduziblen Komponenten von A'' , folgt hieraus $A'' = |\bar{f}^1|(|f|(A''))$. Nach 4.1 ist A'' analytisch dünn in X ; nach 4.6 folgt, daß $|f|(A'')$ analytisch dünn in Y ist. Nach 4.3 ist $B = |f|(A') \cup |f|(A'')$ analytisch dünn in Y .

b) A sei nicht analytisch dünn in X . Nach 4.2 gibt es ein $D \in \mathfrak{M}_X$ mit $D \subset A$. Nach 6.3 gilt $|f|(D) \in \mathfrak{M}_Y$; wegen $|f|(D) \subset B$ folgt daher aus 4.2, daß B nicht analytisch dünn in Y ist.

(6.7) Corollar. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung und B eine analytische Menge in Y . Genau dann ist B analytisch dünn in Y , wenn $|\bar{f}^1|(B)$ analytisch dünn in X ist.

(6.8) Satz. Es seien X, Y, Z komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ holomorphe Abbildungen und $h := g \circ f$.

a) Sind f und g eigentliche Modifikationsabbildungen, so auch h .

b) Ist h eine eigentliche Modifikationsabbildung und ist f eine Surjektion, so sind f und g eigentliche Modifikationsabbildungen.

Beweis. a) $|h|$ ist eigentlich nach [2, I.10.1, Prop. 5a)]. Sei $S := |g|(S(f)) - S(g)$; nach 5.9 gilt $S(h) =$

$S(g) \cup S$. Wegen $|\bar{g}^{-1}|(S) \subset S(f)$ folgt aus 6.1 und 6.7, daß S und somit auch $S(h)$ analytisch dünn in Z ist. Nach 6.7 ist $|\bar{h}^{-1}|(S(h)) = |\bar{f}^{-1}|(|\bar{g}^{-1}|(S(h)))$ analytisch dünn in X ; nach 6.1 ist h eigentliche Modifikationsabbildung.

b) $|f|$ und $|g|$ sind eigentlich nach [2, I.10.1, Prop. 5, b) und d)] . Wegen $S(g) \subset S(h)$ ist $S(g)$ analytisch dünn in Z ; nach 4.6 und 6.7 ist $|\bar{g}^{-1}|(S(g)) = |f|(|\bar{f}^{-1}|(|\bar{g}^{-1}|(S(g)))) = |f|(|\bar{h}^{-1}|(S(g)))$ analytisch dünn in Y ; somit ist g nach 6.1 eigentliche Modifikationsabbildung.

Wegen $|g|(S(f)) \subset S(h)$ ist $|g|(S(f))$ analytisch dünn in Z ; nach 6.6 ist daher $S(f)$ analytisch dünn in X ; wegen $|\bar{f}^{-1}|(S(f)) \subset |\bar{f}^{-1}|(|\bar{g}^{-1}|(|g|(S(f)))) = |\bar{h}^{-1}|(|g|(S(f)))$ ist $|\bar{f}^{-1}|(S(f))$ analytisch dünn in X . Nach 6.1 ist f eigentliche Modifikationsabbildung.

Wir werden im nächsten Paragraphen die folgende Aussage benötigen:

(6.9) Es seien $f_v: X_v \rightarrow Y_v$, $v = 1, 2$, eigentliche Modifikationsabbildungen. Dann ist $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ eine eigentliche Modifikationsabbildung.

Beweis. Nach [2, I.10.1, Prop. 4a)] ist $|f_1 \times f_2| = |f_1| \times |f_2|$ eigentlich. Man prüft leicht nach: $S(f_1 \times f_2) \subset (S(f_1) \times |Y_2|) \cup (|Y_1| \times S(f_2))$; daraus folgt:

$$|\overline{f_1 \times f_2}^{-1}|(S(f_1 \times f_2)) \subset |\overline{f_1 \times f_2}^{-1}|((S(f_1) \times |Y_2|) \cup (|Y_1| \times S(f_2))) =$$

$(|f_1|^{-1}(S(f_1)) \times |X_2|) \cup (|X_1| \times |f_2|^{-1}(S(f_2)))$; die Behauptung folgt somit aus 6.1 und aus dem nachstehenden, leicht zu beweisenden Hilfssatz:

(6.10) Es seien X, Y komplexe Räume und $A \subset |X|$ eine analytisch dünne Teilmenge. Dann ist $A \times |Y|$ analytisch dünn in $X \times Y$.

§ 7. Meromorphe Abbildungen

Definition. Es seien X, Y komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz und (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f . Dann heißt f **meromorphe Abbildung**, wenn $u: T \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung und (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f , so ist nach 6.1 die analytische Menge $\Sigma(u) = \Sigma(f)$ analytisch dünn in X . Ferner ist $f|X - \Sigma(f) \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Eine meromorphe Abbildung ist also "fast überall holomorph".

Ist der Urbildraum X primär, so lassen sich meromorphe Abbildungen besonders einfach charakterisieren; denn offensichtlich gilt:

(7.1) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz, und sei X primär. Genau dann ist f eine meromorphe Abbildung, wenn gilt:

1. f ist primär.
2. $\Sigma(f) \neq |X|$.

Für beliebige Urbildräume gilt:

(7.2) Satz. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz. Genau dann ist f eine meromorphe Abbildung, wenn es eine Primärzerlegung $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ und meromorphe Abbil-

dungen $f_v: X_v \rightarrow Y$ ($v \in I$) gibt, so daß gilt:

$$(1) \quad f = \bigcup_{v \in I} f_v .$$

(2) Für jedes $v \in I$ ist $\Sigma(f_v)$ analytisch dünn in X .

(3) Gilt $|X_v| \subset |X_\mu|$ für gewisse $v, \mu \in I$, so folgt $|f_v| \subset |f_\mu|$.

In (1) und (2) sind dabei die f_v als Korrespondenzen von X nach Y aufzufassen, d.h. genauer: Für $v \in I$ sei (T_v, u_v, v_v) der eingebettete Repräsentant von f_v und $i_v: X_v \rightarrow X$ die kanonische Immersion. Dann betrachte man statt f_v die eingebettete holomorphe Korrespondenz $\tilde{f}_v := [(T_v, \tilde{u}_v, v_v)]$ mit $\tilde{u}_v := i_v \circ u_v$. Man sieht leicht, daß

$$\begin{array}{ccc} T_v & \xlongequal{\quad} & T_v \\ u_v \downarrow & & \downarrow \tilde{u}_v \\ X_v & \xrightarrow{i_v} & X \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat ist; daraus folgt: $\tilde{f}_v|_{X_v} = f_v$.

Beweis des Satzes. a) f sei meromorphe Abbildung. Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f und $T = \bigcup_{v \in I} T_v$ eine Primärzerlegung. Für jedes $v \in I$ sei $X_v := u(T_v)$, $u_v := u|_{T_v} \rightarrow X_v$, $v_v := v|_{T_v} \rightarrow Y$ und $f_v := [(T_v, u_v, v_v)]$. Nach 6.3 ist dann $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ eine Primärzerlegung, und die holomorphen Abbildungen u_v sind eigentliche Modifikationsabbildungen. Wegen $\Sigma(f_v) \subset \Sigma(f)$ ist jedes $\Sigma(f_v)$ analytisch dünn in X . Gilt $|X_v| \subset |X_\mu|$ für gewisse $v, \mu \in I$ und setzt man $U := X - \Sigma(f)$, $W := T - |\tilde{u}|^{-1}(\Sigma(f))$, so folgt $|T_v| \cap |W| \neq \emptyset$ und $|T_v| \cap |W| \subset |T_\mu| \cap |W|$; aus dem Identitätssatz für irreduzible analytische Mengen folgt $|T_v| \subset |T_\mu|$.

b) Zum Beweis der Umkehrung sei vorausgesetzt, daß es eine Primärzerlegung $X = \bigcup_{v \in I} X_v$ und meromorphe Abbildungen $f_v: X_v \rightarrow Y$ ($v \in I$) gibt, so daß die Aussagen (1) - (3) gelten. Wir zeigen, daß die Menge $\Sigma := \bigcup_{v \in I} \Sigma(f_v)$ analytisch in X ist. Dies ist eine lokale Aussage. Sei $x \in |X|$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x bzgl. $|X|$, die nur endlich viele der $|X_v|$ trifft. Sei $J := \{v \in I: |X_v| \cap U \neq \emptyset\}$; dann gilt offensichtlich $\Sigma \cap U = \bigcup_{v \in J} (\Sigma(f_v) \cap U)$; da J endlich ist, folgt, daß $\Sigma \cap U$ analytisch in $(U, \mathcal{O}_X U)$ ist. Also ist Σ analytisch. Nach 4.3 und wegen (2) ist Σ analytisch dünn in X .

Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f ; wir zeigen, daß $|\bar{u}^{-1}|(\Sigma)$ analytisch dünn in T ist. Es seien (T_v, u_v, v_v) die eingebetteten Repräsentanten von f_v ; dann gilt $T = \bigcup_{v \in I} T_v$, und für jedes $v \in I$ gilt: (i) T_v ist primär, (ii) $X_v = u(T_v)$, (iii) $u_v = u|_{T_v} \rightarrow X_v$. Es gibt kein $\mu \in I$ mit $|T_\mu| \subset |\bar{u}^{-1}|(\Sigma)$. Denn für ein solches μ würde gelten: $|X_\mu| = |u|(|T_\mu|) \subset \Sigma = \bigcup_{v \in I} \Sigma(f_v)$; wegen 4.2 wäre dies ein Widerspruch dazu, daß Σ analytisch dünn in X ist. Sei nun $W \subset |T|$ eine offene Menge und $\varphi \in \mathcal{O}_T(W)$ mit $\varphi|_{W - |\bar{u}^{-1}|(\Sigma)} = 0$. Sei $t \in W \cap |\bar{u}^{-1}|(\Sigma)$; es ist zu zeigen: $\varphi_t = 0$. Es seien $\mathcal{G}_v \subset \mathcal{O}_T$ ($v \in I$) die Idealgarben, welche die abgeschlossenen komplexen Unterräume T_v von T definieren. Setzt man $J_t := \{v \in I: t \in |T_v|\}$, so gilt $\bigcap_{v \in J_t} \mathcal{G}_v = (0)$. Ferner gilt $|T_v| \cap |\bar{u}^{-1}|(\Sigma) \neq |T_v|$ für jedes $v \in J_t$. Daraus folgt, da die T_v primär sind: $\varphi_t \in \mathcal{G}_{v,t}$ für jedes $v \in J_t$, also $\varphi_t \in \bigcap_{v \in J_t} \mathcal{G}_v = (0)$.

Es bleibt zu zeigen, daß die holomorphe Abbildung $u|_{T - |\tilde{u}^{-1}|(\Sigma)} \rightarrow X - \Sigma$ biholomorph ist. Es gilt $T - |\tilde{u}^{-1}|(\Sigma) = \bigcup_{v \in I} (T_v - |\tilde{u}^{-1}|(\Sigma))$ und $X - \Sigma = \bigcup_{v \in I} (X_v - \Sigma)$, und für jedes $v \in I$ ist die holomorphe Abbildung $\tilde{u}_v := u|_{T_v - |\tilde{u}^{-1}|(\Sigma)} \rightarrow X_v - \Sigma$ biholomorph. Daraus folgt die Behauptung.

(7.3) Es seien $f_v: X_v \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$) meromorphe Abbildungen mit $f_1 \subset f_2$. Dann gilt $f_1 = f_2$.

Beweis. Seien (T_v, u_v, v_v) die eingebetteten Repräsentanten von f_v . Dann ist T_1 ein abgeschlossener komplexer Unterraum von T_2 ; ferner sind die u_v eigentliche Modifikationsabbildungen, und es gilt $u_2|_{T_1} = u_1$. Aus 6.4 folgt daher: $T_1 = T_2$.

(7.4) Identitätssatz für meromorphe Abbildungen. Es seien X, Y komplexe Räume und $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ meromorphe Abbildungen. Gibt es einen nicht-leeren offenen komplexen Unterraum U von X mit

$$(i) \quad |U| \cap A \neq \emptyset \text{ für jedes } A \in \mathfrak{M}_X,$$

$$(ii) \quad f_1|_U \subset f_2|_U,$$

so folgt $f_1 = f_2$. Ist insbesondere B eine analytisch dünne analytische Menge in X und gilt $f_1|_{X-B} = f_2|_{X-B}$, so folgt $f_1 = f_2$.

Beweis. Wegen 7.3 ist nur zu beweisen: $f_1 \subset f_2$. Nach 5.7 muß man hierzu zeigen: Für jedes $g \in \mathfrak{M}_{f_1}$ gilt $g|_{|U|} \neq \emptyset$.

Sei $g \in \mathfrak{M}_{f_1}$ und sei (B, u_B, v_B) der eingebettete Repräsentant von g ; sei ferner (T_1, u_1, v_1) der eingebettete Repräsentant von f_1 . Nach Definition des Komponentensystems $\mathfrak{M}_{f_1}$ gilt dann $B \in \mathfrak{M}_{T_1}$. Da u_1 eine eigentliche Modifikationsabbildung ist, folgt aus 6.3: $|u_1|(B) \in \mathfrak{M}_X$; wegen (i) gilt somit $|U| \cap |u_1|(B) \neq \emptyset$, also $g \mid |U| \neq \emptyset$.

(7.5) Es seien $f_v: X_v \rightarrow Y_v$, $v = 1, 2$, meromorphe Abbildungen. Dann ist auch $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ eine meromorphe Abbildung.

Der Beweis ergibt sich aus 1.17, 5.5 und 6.9.

Wie im reduzierten Fall (vgl. K. Stein [15, S. 838]) müssen Verbindung, Komposition oder auch eingebettete Komposition meromorpher Abbildungen nicht wieder meromorphe Abbildungen sein. Aus dem folgenden Lemma wird sich aber die Möglichkeit ergeben, eine sog. "meromorphe Verbindung" und - unter gewissen Voraussetzungen - eine sog. "meromorphe Komposition" zu definieren.

(7.5) Lemma. Es seien X, Y komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine eingebettete holomorphe Korrespondenz, derart, daß $\Sigma(f)$ analytisch dünn in X ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte in f analytisch enthaltene meromorphe Abbildung $\hat{f}: X \rightarrow Y$; es gilt $f|_{X - \Sigma(f)} = \hat{f}|_{X - \Sigma(f)}$.

Beweis. Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f . Da $S(u) = \Sigma(f)$ analytisch dünn in X ist, gibt es nach

6.4 einen eindeutig bestimmten abgeschlossenen komplexen Unterraum $\hat{T}$ von T , derart, daß $\hat{u} := u|_{\hat{T}} \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist. Setzt man noch $\hat{v} := v|_{\hat{T}} \rightarrow Y$, so ist daher $\hat{f} := [(\hat{T}, \hat{u}, \hat{v})]$ eine meromorphe Abbildung. Da $f|_{X - \Sigma(f)}$ eine holomorphe Abbildung ist, folgt aus 7.3: $f|_{X - \Sigma(f)} = \hat{f}|_{X - \Sigma(f)}$.

Seien nun $f_v: X \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$) meromorphe Abbildungen. Man überlegt sich leicht: $\Sigma((f_1, f_2)) \subset \Sigma(f_1) \cup \Sigma(f_2)$; nach 7.6 existiert daher eine eindeutig bestimmte in (f_1, f_2) analytisch enthaltene meromorphe Abbildung $\{f_1, f_2\}$.

Definition. Die meromorphe Abbildung $\{f_1, f_2\}: X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ heißt meromorphe Verbindung von f_1 und f_2 .

Definition. Es seien X, Y, Z komplexe Räume und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ holomorphe Korrespondenzen, derart, daß $\Sigma(g \circ f)$ analytisch dünn in X ist. Dann heißt die eindeutig bestimmte in $g \circ f$ analytisch enthaltene meromorphe Abbildung die meromorphe Komposition von f und g und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

Wir verwenden die Sprechweise " $g \circ f$ ist definiert", falls $\Sigma(g \circ f)$ analytisch dünn in X ist.

(7.7) Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ meromorphe Abbildungen, und es sei $|\hat{f}|^{-1}(\Sigma(g))$ analytisch dünn in X . Dann ist $g \circ f$ definiert.

Beweis. Es seien (T, u, v) und (T', u', v') die eingebetteten Repräsentanten von f bzw. g , und es sei (T'', p, p') das Faserprodukt von $v: T \rightarrow Y$ und $u': T' \rightarrow Y$; ferner sei $u'' := u \circ p$, $v'' := v' \circ p'$. Dann ist (T'', u'', v'') Repräsentant von $g \circ f$. Im Beweis von 6.5 wurde gezeigt: $S(p) \subset |\bar{v}|^{-1}(S(u'))$; hieraus folgt: $|u|(S(p)) \subset |u|(|\bar{v}|^{-1}(S(u'))) = |\bar{f}|^{-1}(\Sigma(g))$; daher ist $|u|(S(p))$ analytisch dünn in X . Nach 5.9 gilt $S(u'') \subset S(u) \cup |u|(S(p))$; somit ist $S(u'')$ analytisch dünn in X . Nach 5.10 gilt ferner $\Sigma(g \circ f) \subset \Sigma(gf) \subset S(u'')$; also ist $\Sigma(g \circ f)$ analytisch dünn in X und daher $g \circ f$ definiert.

(7.8) Corollar. Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ meromorphe Abbildungen. Die Korrespondenz $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ sei surjektiv, und es sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- a) Zu jedem $A \in \mathfrak{M}_X$ gibt es ein $B \in \mathfrak{M}_Y$ mit $|f|^{-1}(B) \subset A$.
- b) f ist eine holomorphe Abbildung, und für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$ gilt $|f|(A) \in \mathfrak{M}_Y$.
- c) X ist primär.

Dann ist $g \circ f$ definiert.

Beweis. Nach 7.7 genügt es zu zeigen, daß $|f|^{-1}(\Sigma(g))$ analytisch dünn in X ist. Nach 6.1 und 4.2 gilt $B \not\subset \Sigma(g)$ für alle $B \in \mathfrak{M}_Y$; da $|f|$ surjektiv ist, folgt hieraus $|f|^{-1}(B) \not\subset |f|^{-1}(\Sigma(g))$ für alle $B \in \mathfrak{M}_Y$. Nehmen wir an, $|f|^{-1}(\Sigma(g))$ sei nicht analytisch dünn in X . Nach 4.2 gibt es dann ein $A \in \mathfrak{M}_X$ mit $A \subset |f|^{-1}(\Sigma(g))$. Gilt Voraussetzung a), so gibt es ein $B \in \mathfrak{M}_Y$ mit $|f|^{-1}(B) \subset A \subset |f|^{-1}(\Sigma(g))$,

ein Widerspruch. Aus Voraussetzung b) folgt nach 1.9 :

$|f| |f|^{-1} = \text{id}_{|Y|}$, also $|f|(A) \subset |f|(|f|^{-1}(\Sigma(g))) = \Sigma(g)$,
und dies ist wegen $|f|(A) \in \mathfrak{M}_Y$ ein Widerspruch. Ist X pri-
mär (Voraussetzung c)), so ist Voraussetzung a) stets erfüllt.

(7.9) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung und
 $g: Y \rightarrow Z$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist $g \circ f$ definiert,
und es gilt $g \circ f = g * f$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $g * f$ eine meromorphe Ab-
bildung ist. Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von
 f . Dann ist $g * f = [(T, u, gv)]$. Bezeichnet (T^*, u^*, v^*) den
eingebetteten Repräsentanten von $g * f$, so existiert eine Sur-
jektion $t: T \rightarrow T^*$ mit $u = u^* \circ t$ und $gv = v^* \circ t$. Nach 6.8 ist
 u^* eine eigentliche Modifikationsabbildung.

Aufgrund von 7.9 läßt sich die folgende Aussage sinn-
voll formulieren:

(7.10) Es seien $f_v: X \rightarrow Y_v$ ($v = 1, 2$) meromorphe Ab-
bildungen. Bezeichnet man mit $q_v: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_v$ die Projek-
tionsabbildungen, so kommutieren für $v = 1, 2$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\{f_1, f_2\}} & Y_1 \times Y_2 \\ & \searrow f_v & \downarrow q_v \\ & & Y_v \end{array}$$

bei meromorpher Komposition, d.h., es gilt $f_v = q_v \circ \{f_1, f_2\}$.

Bemerkungen. 1. Man vergleiche 7.10 mit 1.14 .

2. Wegen 7.9 kommutieren die obigen Diagramme auch bei eingebetteter Komposition, d.h., es gilt $f_v = q_v * \{f_1, f_2\}$.

Beweis. Sei $\Sigma := \Sigma(f_1) \cup \Sigma(f_2)$. Offensichtlich gilt $\{f_1, f_2\} | X - \Sigma = (f_1, f_2) | X - \Sigma = (f_1 | X - \Sigma, f_2 | X - \Sigma)$. Für $v = 1, 2$ ist nun $f_v | X - \Sigma \rightarrow Y_v$ eine holomorphe Abbildung; also gilt $q_v \wedge (\{f_1, f_2\} | X - \Sigma) = q_v (f_1 | X - \Sigma, f_2 | X - \Sigma) = f_v | X - \Sigma$. Aus dem Identitätssatz 7.4 folgt die Behauptung.

Für drei meromorphe Abbildungen kann man die folgende Aussage machen:

(7.11) Es seien $f_v: X_v \rightarrow X_{v+1}$, $v = 1, 2, 3$, meromorphe Abbildungen. Es gelte:

- a) $|f_2|^{-1}(\Sigma(f_3))$ ist analytisch dünn in X_2 .
- b) $|f_1|^{-1}(\Sigma(f_2) \cup |f_2|^{-1}(\Sigma(f_3)))$ ist analytisch dünn in X_1 .

Dann sind die meromorphen Abbildungen $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1)$ und $(f_3 \wedge f_2) \wedge f_1$ definiert und stimmen überein.

Bemerkung. Die Voraussetzungen a) und b) sind stets dann erfüllt, wenn für die meromorphen Abbildungen f_1 und f_2 eine der drei Voraussetzungen von 7.8 erfüllt ist; also insbesondere dann, wenn X_1, X_2 primär und $|f_1|, |f_2|$ surjektiv sind.

Beweis. Sei $\Sigma_2 := \Sigma(f_2) \cup |f_2|^{-1}(\Sigma(f_3))$ und $\Sigma_1 := \Sigma(f_1) \cup |f_1|^{-1}(\Sigma_2)$; dann sind Σ_1 und Σ_2 analytisch dünn

in X_1 bzw. X_2 . Wegen a) ist $f_3 \wedge f_2$ definiert (7.7). Wegen $\Sigma(f_3 \wedge f_2) = \Sigma(f_3 * f_2) \subset \Sigma_2$ (vgl. Beweis von 7.7) folgt aus b), daß $(f_3 \wedge f_2) \wedge f_1$ und $f_2 \wedge f_1$ definiert sind. Ferner ist $|f_2 \wedge f_1|^{-1}(\Sigma(f_3)) = |f_2 f_1|^{-1}(\Sigma(f_3)) = |f_1|^{-1}(|f_2|^{-1}(\Sigma(f_3)))$ nach b) analytisch dünn in X_1 ; daher ist $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1)$ definiert.

Es bleibt zu zeigen: $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1) = (f_3 \wedge f_2) \wedge f_1$. Wir benutzen hierzu den folgenden Hilfssatz, der unter Verwendung von 1.2 auf einfache Weise bewiesen werden kann:

(7.12) Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ meromorphe Abbildungen, und es sei $|f|^{-1}(\Sigma(g))$ analytisch dünn in X . Sei $\Sigma := \Sigma(f) \cup |f|^{-1}(\Sigma(g))$. Dann stimmen die Beschränkungen $g \wedge f|_{X - \Sigma} \rightarrow Z$ und $gf|_{X - \Sigma} \rightarrow Z$ überein und sind gleich der Komposition von $f|_{X - \Sigma} \rightarrow Y - \Sigma(g)$ und $g|_{Y - \Sigma(g)} \rightarrow Z$.

Die Beschränkung $f|_{X - \Sigma} \rightarrow Y - \Sigma(g)$ ist dabei in kanonischer Weise definiert; bezeichnet man mit f' die holomorphe Abbildung $f|_{X - \Sigma(f)} \rightarrow Y$, so stimmt sie mit $f' | \bar{f}'^{-1}(Y - \Sigma(g)) \rightarrow Y - \Sigma(g)$ überein.

Man setze nun

$$\begin{aligned} f'_1 &:= f_1|_{X_1 - \Sigma_1} \rightarrow X_2 - \Sigma_2, \\ f'_2 &:= f_2|_{X_2 - \Sigma_2} \rightarrow X_3 - \Sigma(f_3), \\ f'_3 &:= f_3|_{X_3 - \Sigma(f_3)} \rightarrow X_4; \end{aligned}$$

dann sind die f'_i holomorphe Abbildungen, und aus 7.12 folgt: $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1)|_{X_1 - \Sigma_1} = f'_3(f'_2 f'_1)$ und $(f_3 \wedge f_2) \wedge f_1|_{X_1 - \Sigma_1} = (f'_3 f'_2) f'_1$, also $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1)|_{X_1 - \Sigma_1} = (f_3 \wedge f_2) \wedge f_1|_{X_1 - \Sigma_1}$. Da Σ_1 analytisch

dünn in X_1 ist, trifft die offene Menge $|X_1| - \Sigma_1$ alle analytischen Mengen des Komponentensystems $\mathfrak{M}_{X_1}$; aus dem Identitätssatz 7.4 folgt somit: $f_3 \wedge (f_2 \wedge f_1) = (f_3 \wedge f_2) \wedge f_1$. Damit ist 7.11 bewiesen.

Definition. Eine meromorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **bimeromorph**, wenn auch f^{-1} eine meromorphe Abbildung ist.

Nach Definition ist mit f auch stets f^{-1} bimeromorph. Eine eingebettete holomorphe Korrespondenz $f: X \rightarrow Y$ mit dem eingebetteten Repräsentanten (T, u, v) ist genau dann bimeromorph, wenn u und v eigentliche Modifikationsabbildungen sind; insbesondere ist jede eigentliche Modifikationsabbildung bimeromorph.

Eine bimeromorphe Abbildung ist als holomorphe Korrespondenz surjektiv (vgl. Definition S. 42) und eigentlich.

Eine bimeromorphe Abbildung ist "fast überall biholomorph", d.h. genauer:

(7.13) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine bimeromorphe Abbildung. Dann sind die analytischen Mengen $P := \Sigma(f) \cup |f|^{-1}(\Sigma(f^{-1}))$ und $Q := \Sigma(f^{-1}) \cup |f|(\Sigma(f))$ analytisch dünn in X bzw. Y , und die Beschränkung $f_1 := f|_{X-P} \rightarrow Y-Q$ ist eine biholomorphe Abbildung.

Beweis. Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f , und sei $R := |\bar{u}|^{-1}(S(u)) \cup |\bar{v}|^{-1}(S(v))$. Dann ist $P = |u|(R)$, $Q = |v|(R)$; da $S(u)$ und $S(v)$ analytisch dünn

sind, sind es nach 4.3 und 6.6 auch P und Q . Ferner sind $u_1 := u|_{T-R \rightarrow X-P}$ und $v_1 := v|_{T-R \rightarrow Y-Q}$ biholomorph; daraus folgt, daß $f_1 = [(T-R, u_1, v_1)]$ eine biholomorphe Abbildung ist.

Aus 6.6 folgt, daß Bild und Urbild von analytisch dünnen Mengen bei bimeromorphen Abbildungen analytisch dünn sind. Nach 7.7 gilt daher:

(7.14) Ist $f: X \rightarrow Y$ eine bimeromorphe Abbildung und $g: Y \rightarrow Z$ eine meromorphe Abbildung, so ist $g \circ f$ definiert.

(7.15) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine bimeromorphe Abbildung. Dann gilt $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von 7.13 gilt nach 7.12 : $f^{-1} \circ f|_{X-P} = f_1^{-1} f_1 = \text{id}_{X-P} = \text{id}_X|_{X-P}$; die Behauptung folgt nun aus dem Identitätssatz 7.4.

(7.16) Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ bimeromorphe Abbildungen. Dann ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ bimeromorph.

Beweisskizze. Nach 7.14 ist $g \circ f$ definiert; es ist zu zeigen, daß $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$ eine meromorphe Abbildung ist. Wir zeigen, daß $(g \circ f)^{-1}$ gleich der meromorphen Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist. Man kann analytisch dünne Mengen A, B, C in X, Y bzw. Z angeben, derart, daß die Beschränkungen $f_1 := f|_{X-A \rightarrow Y-B}$ und $g_1 := g|_{Y-B \rightarrow Z-C}$ definiert sind und biholomorphe Abbildungen darstellen. Wir bezeichnen mit Φ die Beschränkung $g \circ f|_{X-A \rightarrow Z-C}$ und mit Ψ die Beschränkung $(g \circ f)^{-1}|_{Z-C \rightarrow X-A}$. Dann gilt: $\Psi = \Phi^{-1} = (g_1 f_1)^{-1} =$

$f_1^{-1} g_1^{-1} = \bar{f}^{-1} \bar{g}^{-1} | Z - C$; bei diesem Schluß wurde eine einfache Verallgemeinerung von 7.12 benutzt. Aus dem Identitätssatz 7.4 folgt die Behauptung.

§ 8. Fortsetzung von eingebetteten Korrespondenzen

In diesem Paragraphen werden für eingebettete Korrespondenzen Fortsetzungssätze vom Typ des II. Riemannschen Hebbarkeitssatzes bewiesen. Es handelt sich um das folgende Problem:

Seien X, Y komplexe Räume, A eine analytische Menge in X und $f: X - A \rightarrow Y$ eine eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz. Gibt es eine eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ mit $f = \tilde{f}|X - A$? Wenn ja, so heißt $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f auf X ; f heißt auf X fortsetzbar.

Die Fortsetzung $\tilde{f}$ ist i.a. nicht eindeutig bestimmt. Der folgende Satz sagt aber aus, daß es unter allen Fortsetzungen von f eine eindeutig bestimmte kleinste Fortsetzung f_1 gibt:

(8.1) Satz. Die eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz $f: X - A \rightarrow Y$ sei fortsetzbar auf X . Dann gibt es genau eine eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz $f_1: X \rightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_1|X - A = f$.
2. Ist $f_2: X \rightarrow Y$ eine weitere eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz mit $f_2|X - A = f$, so ist f_1 in f_2 analytisch enthalten.

Beweis. Sei $Z := X \times Y$ und $B := A \times |Y|$. Sei f_2 eine Fortsetzung von f auf X , sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f , und sei (T_2, u_2, v_2) der eingebettete

Repräsentant von f_2 . T sei als abgeschlossener komplexer Unterraum von $Z-B$ durch die kohärente Idealgarbe $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_{Z-B}$ definiert; entsprechend sei $\mathfrak{F}_2 \subset \mathcal{O}_Z$ die T_2 definierende kohärente Idealgarbe. Wir definieren eine Idealgarbe $\mathfrak{F}_1 \subset \mathcal{O}_Z$ als Lückengarbe $\mathfrak{F}_2[B]$ (vgl. [13, 19]); für jede offene Menge $W \subset |Z|$ gelte also $\mathfrak{F}_1(W) = \{s \in \mathcal{O}_Z(W) : s|_{W-B} \in \mathfrak{F}_2(W-B) = \mathfrak{F}(W-B)\}$. Nach [13, Theorem 1] ist $\mathfrak{F}_1$ kohärent. Die Definition von $\mathfrak{F}_1$ ist offenbar unabhängig von der Wahl der Fortsetzung T_2 ; ferner gilt: (i) $\mathfrak{F}_1|_{Z-B} = \mathfrak{F}$, (ii) $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$. Ist T_1 der durch $\mathfrak{F}_1$ definierte abgeschlossene komplexe Unterraum, bezeichnet man mit $u_1: T_1 \rightarrow X$ und $v_1: T_1 \rightarrow Y$ die durch die Projektionen bestimmten holomorphen Abbildungen und setzt man $f_1 := [(T_1, u_1, v_1)]$, so folgt die Behauptung.

Wegen der Definition von $\mathfrak{F}_1$ als Lückengarbe ergibt sich aus diesem Beweis ferner folgendes:

(8.2) Die Bedingung 2 in 8.1 kann durch die folgende Bedingung ersetzt werden:

2'. Ist (T_1, u_1, v_1) der eingebettete Repräsentant von f_1 , so ist die analytische Menge $|T_1| \cap B$ analytisch dünn in T_1 .

Insbesondere gilt $|T_1| = \overline{|T|}$, wenn mit (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f bezeichnet wird.

Wie bereits aus dem Beweis von 8.1 klar hervorgeht, ist das Fortsetzungsproblem für die eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz f äquivalent mit einem Fortsetzungsproblem für die kohärente Idealgarbe $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_Z$ (Bezeichnungen

wie oben). Zur Lösung dieses Fortsetzungsproblems stehen allgemeine Fortsetzungssätze für kohärente analytische Modulgarben zur Verfügung [3, 14, 18, 20]. Wir werden den grundlegenden Satz von J. Frisch und J. Guenot [3] benutzen, nach dem $\mathfrak{F}$ fortsetzbar ist, falls eine gewisse Voraussetzung über die Dimension von B und über die homologische Codimension von $\mathfrak{F}$ erfüllt ist. Wir wollen deshalb zunächst die Definition und einige Eigenschaften der homologischen Codimension anführen [1, 12]. Es sei R ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter R -Modul, $M \neq (0)$.

Definition. Eine Folge $(x_1, \dots, x_n)$ von Elementen von $\mathfrak{m}$ heißt M -Folge, wenn für $v=1, \dots, n$ gilt: x_v ist kein Nullteiler in $M/(x_1, \dots, x_{v-1})M$. Die Zahl n heißt Länge der M -Folge $(x_1, \dots, x_n)$. Die maximale Länge von M -Folgen heißt homologische Codimension von M über R und wird mit $\text{codh}_R M$ bezeichnet.

Eine M -Folge heißt maximal, wenn sie sich zu keiner längeren M -Folge erweitern läßt. Alle maximalen M -Folgen haben die gleiche Länge. Daher kann man $\text{codh}_R M$ auch als Länge einer maximalen M -Folge definieren.

Die Bezeichnung "homologische Codimension" rührt von dem folgenden Satz her: Ist R ein regulärer Ring der Dimension n , so gilt $\text{dh}_R M + \text{codh}_R M = n$; dabei bezeichnet $\text{dh}_R M$ die homologische Dimension von M über R (vgl. [1, 12]).

Wir werden die folgenden Eigenschaften der homologischen Codimension benötigen:

(i) Ist R Quotientenring eines lokalen Ringes S , so ändert sich die homologische Codimension von M nicht, wenn man M als S -Modul statt als R -Modul auffaßt. Man kann deshalb auch einfach $\text{codh } M$ schreiben.

(ii) Für jeden lokalen Ring R gilt $\text{codh } R \leq \dim R$; für jeden regulären lokalen Ring R gilt $\text{codh } R = \dim R$.

Sei nun X ein komplexer Raum und $\mathfrak{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X . Sei $|\mathfrak{F}| := \{x \in |X| : \mathfrak{F}_x \neq (0)\}$ der Träger von $\mathfrak{F}$ und $x \in |\mathfrak{F}|$. Dann verwenden wir die Bezeichnung $\text{codh}_x \mathfrak{F} := \text{codh } \mathfrak{F}_x$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$S_k(\mathfrak{F}) := \{x \in |\mathfrak{F}| : \text{codh}_x \mathfrak{F} \leq k\}.$$

Nach [11, Satz 5] ist dann $S_k(\mathfrak{F})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine analytische Menge in X , und es gilt $\dim S_k(\mathfrak{F}) \leq k$.

Wir können nun den Satz von Frisch-Guenot [3, Cor. VII.4] formulieren. Die Aussage dieses Satzes ist hier etwas abgeschwächt; hierdurch konnte die Einführung einer weiteren Bezeichnung vermieden werden.

(8.3) Satz. Sei Z ein komplexer Raum, B eine analytische Menge in Z und $\mathfrak{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf $Z - B$. Für alle natürlichen Zahlen k mit $k \leq \dim B$ gelte:

$$\dim S_{k+2}(\mathfrak{F}) \leq k.$$

Dann existiert eine kohärente Fortsetzung von $\mathfrak{F}$ auf Z .

Aus diesem Satz leiten wir einen Fortsetzungssatz für sog. isolierte komplexe Unterräume her.

Definition. Ein komplexer Raum X heißt i s o l i e r t, wenn keine analytische Menge des Komponentensystems $\mathfrak{M}_X$ in einer anderen enthalten ist, d.h., wenn für alle $A, B \in \mathfrak{M}_X$ gilt: $A \cap B \neq A$, falls $A \neq B$.

Der Name "isoliert" leitet sich aus der folgenden Charakterisierung der isolierten komplexen Räume ab. In Übereinstimmung mit 4.12,b) nennen wir eine Primärkomponente X_v eines komplexen Raumes X isoliert, wenn $|X_v|$ ein maximales Element von $\mathfrak{M}_X$ bzgl. Inklusion ist.

(8.4) Sei X ein komplexer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist isoliert.
- (ii) Jede Primärkomponente X_v von X ist isoliert.
- (iii) Ist U ein offener komplexer Unterraum von X und A eine nirgends-dichte analytische Menge in U , so ist A analytisch dünn in U .
- (iv) Für jeden Punkt $x \in |X|$ gilt: Die Primärzerlegung des Nullideals $(0) \subset \mathcal{O}_{X,x}$ besitzt keine eingebetteten Komponenten.

Beweis. (i) und (ii) sind trivialerweise äquivalent. Die Äquivalenz von (i) und (iii) ist eine einfache Folgerung aus Lemma 4.2. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) ergibt sich aus [11, Satz 9] (vgl. Beweis von 4.8).

(8.5) Satz. Es sei Z ein komplexer Raum, B eine analytische Menge in Z und T ein isolierter abgeschlossener

komplexer Unterraum von $Z - B$, so daß für jeden Punkt $t \in |T|$ gilt:

$$\dim_t T \geq \dim B + 2.$$

Dann existiert ein abgeschlossener komplexer Unterraum $\tilde{T}$ von Z mit $\tilde{T} \cap (Z - B) = T$.

Beweis. Sei $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_{Z-B}$ die kohärente Idealgarbe, welche den komplexen Unterraum T definiert; es ist zu zeigen, daß eine kohärente Garbe $\tilde{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{O}_Z$ existiert mit $\tilde{\mathfrak{F}}|_{Z-B} = \mathfrak{F}$. Wir zeigen die Kohärenz der Idealgarbe $\mathfrak{F}_1 \subset \mathcal{O}_Z$, die durch $\mathfrak{F}_1(W) := \{s \in \mathcal{O}_Z(W) : s|_{W-B} \in \mathfrak{F}(W-B)\}$ für offene Mengen $W \subset |Z|$ definiert ist. Dies ist ein lokales Problem; daher darf man voraussetzen, daß Z abgeschlossener komplexer Unterraum eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}^n$ ist, definiert durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_G$. Nun kann man T als abgeschlossenen komplexen Unterraum von $G - B$ auffassen; sei $\mathfrak{G} \subset \mathcal{O}_{G-B}$ die definierende Idealgarbe. Man kann ferner voraussetzen: $\dim_t T < \dim_t G$ für jedes $t \in |T|$. Sei $\mathfrak{G}_1 \subset \mathcal{O}_G$ definiert durch $\mathfrak{G}_1(U) := \{s \in \mathcal{O}_G(U) : s|_{U-B} \in \mathfrak{G}(U-B)\}$ für offene Mengen $U \subset G$. Offensichtlich gilt dann $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_1/\mathcal{G} \mid |Z|$; daher ist es hinreichend, die Kohärenz von $\mathfrak{G}_1$ zu beweisen. $\mathfrak{G}_1$ ist genau dann kohärent, wenn die Idealgarbe $\mathfrak{G}$ sich überhaupt kohärent auf G fortsetzen läßt (vgl. Beweis von 8.1), daher ist nach 8.4 zu zeigen: $\dim S_{k+2}(\mathfrak{G}) \leq k$ für jedes $k \leq d := \dim B$.

Zum Beweis benötigen wir eine von G. Scheja [11, Cor. 1 zu Satz 9] bewiesene Abschätzung der Codimension von sog. Defektmengen kohärenter analytischer Garben. Scheja definiert

für eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{S}$ auf einem komplexen Raum X eine Defektfunktion $\text{def}_X \mathcal{S} := \dim_X \mathcal{S} - \text{codh}_X \mathcal{S}$ für $x \in |\mathcal{S}|$ und $\text{def}_X(0) := 0$; als Defektmengen werden die (nach Scheja analytischen) Mengen $D_m(\mathcal{S}) := \{x \in |X| : \text{def}_X \mathcal{S} \geq m\}$, $m \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Ist X ein isolierter komplexer Raum, so gilt $\text{codim } D_m(\mathcal{O}_X) \geq m + 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$; für jedes $x \in |X|$ folgt hieraus $\dim_x D_m(\mathcal{O}_X) \leq \dim_x X - m - 1$.

Sei nun $k \leq d$. Für jedes $t \in |T|$ gilt dann wegen $\dim_t T \geq d + 2$: $\dim_t D_{d-k+1}(\mathcal{O}_T) \leq (d+2) - (d-k+1) - 1 = k$. Daher ist es zum Beweis der Kohärenz von $\mathcal{S}_1$ hinreichend zu zeigen: $S_{k+2}(\mathcal{S}) \subset D_{d-k+1}(\mathcal{O}_T)$ für $k \leq d$; d.h. $\text{codh}_Z \mathcal{S} > k + 2$ für $z \in G - D_{d-k+1}(\mathcal{O}_T)$.

Ist $z \in G - |T|$, so gilt $\mathcal{S}_z = \mathcal{O}_{G,z}$, also $\text{codh}_Z \mathcal{S} = n > d + 2$. Ist $z \in |T| - D_{d-k+1}(\mathcal{O}_T)$, so gilt $\text{def}_Z \mathcal{O}_T = \dim_Z \mathcal{O}_T - \text{codh}_Z \mathcal{O}_T < d - k + 1$; daraus folgt: $\text{codh}_Z \mathcal{O}_T > k + 1$. Es gilt $\mathcal{O}_{T,z} = \mathcal{O}_{G,z}/\mathcal{S}_z$, wegen $\text{codh}_Z \mathcal{O}_T \leq \dim_Z \mathcal{O}_T = \dim_Z T < \dim_Z G = \text{codh}_Z \mathcal{O}_G$ folgt daraus nach [1, Prop. 3.6]: $\text{codh}_Z \mathcal{S} = 1 + \text{codh}_Z \mathcal{O}_T > k + 2$.

Satz 8.5 läßt sich zu einem Fortsetzungssatz für beliebige abgeschlossene komplexe Unterräume T verallgemeinern. Die Dimensionsvoraussetzung in 8.5 muß dann für die einzelnen Primärkomponenten von T erfüllt sein.

(8.6) Satz. Es sei Z ein komplexer Raum, B eine analytische Menge in Z und T ein abgeschlossener komplexer Unterraum von $Z - B$. Für jede analytische Menge $C \in \mathfrak{M}_T$ gelte:

$$\dim C \geq \dim B + 2.$$

Dann existiert ein abgeschlossener komplexer Unterraum $\tilde{T}$ von Z mit $\tilde{T} \cap (Z-B) = T$.

Beweis. Sei $T = \bigcup_{v \in I} T_v$ eine Primärzerlegung von T .

Sei $d := \dim B$ und $e := \dim T$. Wir bezeichnen mit $T^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, die Vereinigung aller Primärkomponenten T_v von T mit $\dim T_v = m$. Dann gilt $T = T^{(d+2)} \cup \dots \cup T^{(e)}$, und jedes $T^{(m)}$, $d+2 \leq m \leq e$, ist offensichtlich ein isolierter komplexer Raum. Nach 8.5 existieren abgeschlossene komplexe Unterräume $\tilde{T}^{(m)}$ von Z mit $\tilde{T}^{(m)} \cap (Z-B) = T^{(m)}$. Setzt man $\tilde{T} := \tilde{T}^{(d+2)} \cup \dots \cup \tilde{T}^{(e)}$, so folgt die Behauptung.

Bemerkung. Satz 8.6 kann auch aus [18, Satz 6.15,b)] abgeleitet werden.

(8.7) Satz. Es seien X, Y komplexe Räume, A eine analytische Menge in X und $f: X-A \rightarrow Y$ eine eingebettete schwach-holomorphe Korrespondenz mit dem eingebetteten Repräsentanten (T, u, v) . Für jede analytische Menge $C \in \mathfrak{M}_T$ gelte:

$$\dim C \geq \dim A + \dim Y + 2.$$

Dann ist f fortsetzbar auf X . Ist f holomorph und f_1 die kleinste Fortsetzung von f , so ist f_1 holomorph.

Beweis. Sei $B := A \times |Y|$; dann gilt für jedes $C \in \mathfrak{M}_T$: $\dim C \geq \dim B + 2$; aus 8.6 folgt daher die Fortsetzbarkeit von f . Sei nun f als holomorph vorausgesetzt. Nach 8.2 gilt dann für den eingebetteten Repräsentanten (T_1, u_1, v_1) von f_1 : $|T_1| = \overline{|T|}$. Das bedeutet (im folgenden benutzen

wir die Bezeichnungen von [16]): $|f_1|$ ist die topologische Fortsetzung von $|f|$. Aus der Voraussetzung $\dim C \geq \dim A + \dim Y + 2$ für jedes $C \in \mathfrak{M}_T$ folgt: $\dim |f| > \dim A$; nach [16, Prop. 3] folgt hieraus, daß $|f_1|$ stetig ist, d.h: f_1 ist holomorph.

(8.8) Satz. Es seien X, Y komplexe Räume, A eine analytische Menge in X und $f: X - A \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung. Für jede analytische Menge $D \in \mathfrak{M}_X$ gelte:

$$(*) \quad \dim D \geq \dim A + \dim Y + 2 .$$

Dann gibt es genau eine meromorphe Abbildung $f_1: X \rightarrow Y$ mit $f = f_1|_{X-A}$.

Beweis. Sei (T, u, v) der eingebettete Repräsentant von f . Dann ist u eine eigentliche Modifikationsabbildung, also "fast überall" biholomorph. Daher folgt aus der Voraussetzung $(*)$ des Satzes für jede analytische Menge $C \in \mathfrak{M}_T$: $\dim C \geq \dim A + \dim Y + 2$; aus Satz 8.7 folgt somit, daß f auf X fortsetzbar ist und daß die kleinste Fortsetzung f_1 von f holomorph ist. Wir zeigen nun, daß f_1 eine meromorphe Abbildung ist.

Aus $(*)$ folgt insbesondere $D \not\subset A$ für jedes $D \in \mathfrak{M}_X$; nach 4.2 ist daher A analytisch dünn in X . Sei (T_1, u_1, v_1) der eingebettete Repräsentant von f_1 ; wegen $S(u_1) \subset S(u) \cup A$ ist dann $S(u_1)$ analytisch dünn in X . Ferner gilt: $|\bar{u}_1|^{-1}(S(u_1)) \subset |\bar{u}_1|^{-1}(S(u)) \cup (|T_1| \cap B)$ mit $B := A \times |Y|$; nach 3.2 ist daher $|\bar{u}_1|^{-1}(S(u_1))$ analytisch dünn in T_1 . Nach 6.1 ist

u_1 eine eigentliche Modifikationsabbildung; d.h., f_1 ist eine meromorphe Abbildung.

Die Eindeutigkeit von f_1 folgt aus dem Identitätssatz 7.4 .

- [1] M. Auslander und D. A. Buchsbaum: Homological dimension in local rings. Trans. A.M.S. 85, 390 - 405 (1957).
- [2] N. Bourbaki: Topologie generale, Ch. I - III, 3^{eme} ed. Paris 1961.
- [3] J. Frisch und J. Guenot: Prolongement de faisceaux analytiques coherents. Inv. math 7, 321 - 343 (1969).
- [4] H. Fujimoto: The theorem of identity for coherent analytic modules. Nagoya Math. Journ 29, 103 - 120 (1967).
- [5] H. Grauert: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. math. I.H.E.S. 5 (1960).
- [6] H. Grauert und R. Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. 68, 393 - 443 (1958)
- [7] A. Grothendieck: Techniques de construction en geometrie analytique. Sem. H. Cartan 1960/61, Exp. 7 - 17.
- [8] R. Narasimhan: Introduction to the theory of analytic spaces. Springer Lecture Notes 25 (1966).
- [9] B. Pareigis: Kategorien und Funktoren. Teubner 1969.
- [10] R. Remmert: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 153, 328 - 370 (1957).
- [11] G. Scheja: Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung. Math. Ann. 157, 75 - 94 (1964).
- [12] J.-P. Serre: Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noetheriens. Int. Symp. Tokyo-Nikko 1955.
- [13] Y.-T. Siu: Noether-Lasker decomposition of coherent analytic subsheaves. Trans. A.M.S. 135, 375 - 385 (1969).
- [14] Y.-T. Siu: Extending coherent analytic sheaves. Ann. of Math., 2nd series, Vol. 90, 108 - 143 (1970).
- [15] K. Stein: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen II. Am. Journ. Math. 86, 823 - 867 (1964).
- [16] K. Stein: Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen. Inv. math. 6, 78 - 90 (1968).
- [17] K. Stein: Meromorphic mappings. Monographie N° 17 de L'Enseignement Mathematique, Genf 1968.
- [18] W. Thimm: Fortsetzung von kohärenten analytischen Modulgarben. Math. Ann. 184, 329 - 353 (1970).

- [19] W. Thimm: Lückengarben von kohärenten analytischen Modulgarben. Math. Ann. 148, 372 - 394 (1962).
- [20] G. Trautmann: Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie. Inv. math. 8, 143 - 147 (1969).
- [21] O. Zariski und P. Samuel: Commutative Algebra. Van Nostrand 1958/60.

Lebenslauf

Am 30. Juni 1943 wurde ich als fünftes der sechs Kinder des Diplom-Ingenieurs Karl Kraus und seiner Ehefrau Julia, geb. Kugler, in Preßburg (C.S.S.R.) geboren.

Von 1947 bis 1953 besuchte ich die Volksschule in Holzhausen bei Buchloe und in München, von 1953 bis 1962 die Oberrealschule an der Frühlingstraße in München, an der ich im Juni 1962 die Reifeprüfung ablegte. Vom Wintersemester 1962 bis einschließlich Sommersemester 1967 studierte ich Mathematik und Physik an der Universität München. Ich hörte Vorlesungen bei F. Bopp, A. Faessler, O. Forster, G. Hämmerlin, E. Heinz, H. Kerner, J. Kranz, K.-J. Ramspott, G.-J. Rieger, W. Rollwagen, A. Schlüter, K. Seebach, K. Stein u. a. Im Herbst 1967 legte ich das Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik ab.

Am 2. November 1967 heiratete ich Fräulein Birgit Wochinger, Tochter des Ministerialdirigenten Dipl.-Ing. Georg Wochinger. Am 30. Oktober 1968 wurde unsere Tochter Maria Jacinta geboren.

Seit Dezember 1967 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München beschäftigt.

